MATHÉMATIQUES

I

ARITHMÉTIQUE - ALGÈBRE
TRIGONOMÉTRIE - GÉOMÉTRIE

R. CLUZEL

FORMATION INITIALE
FORMATION CONTINUE

AIDE-MÉMOIRE
TECHNOR
DELAGRAVE

TECHNIQUES ET **NOR**MALISATION

Collection publiée sous la direction de A. CHEVALIER

Professeur d'ENNEP, ex-chef de Fabrication dans l'Industrie

65e MILLE

MATHÉMATIQUES.1

ARITHMÉTIQUE - ALGÈBRE
TRIGONOMÉTRIE - GÉOMÉTRIE

Candidats aux Examens de l'Enseignement du Second Degré et de l'Enseignement Technique

Certificat d'Aptitude Professionnelle.
Brevet d'Études du Premier Cycle.
Brevet d'Études Professionnelles.
Brevet Professionnel.
Brevet de Technicien.

par

R. CLUZEL

PROFESSEUR D'ÉCOLE NORMALE
NATIONALE D'APPRENTISSAGE

FORMATION INITIALE
FORMATION CONTINUE

PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
1979

Sous la direction de A. CHEVALIER,
professeur d'E.N.N.A. - ex-Chef de fabrication dans l'Industrie

COLLECTION
TECHNIQUES ET NORMALISATION

SÉRIE « BATIMENT »

TECHNOR, format 19,5 x 29

- FORMULAIRE DES INSTALLATIONS SANITAIRES,
  par R. DELEBECQUE et C. ROUX
  Tome 1. Eau froide - Tome 2. Eau chaude - Tome 3. Evacuations - fluides divers
- CONFORT DE L'HABITAT - ISOLATION ACOUSTIQUE,
  par R. DELEBECQUE et J. ROMAGNOLI

TECHNOR, format 13,5 x 21

- BATIMENT 1 (Dessin), par R. DELEBECQUE
- BATIMENT 2 (Eléments de construction), par R. DELEBECQUE

Plaquettes TECHNOR, format 11 x 17
par R. DELEBECQUE

A. ARCHITECTURE (avec huit diapositives) - B. COTATION (avec dix diapositives) - C. SANITAIRE - CHAUFFAGE (avec dix diapositives) - D. BETON ARME 1 - E. BETON ARME 2

SÉRIE « INDUSTRIE »

TECHNOR, format 13,5 x 21 cartonnés

- ELECTRICITE APPLIQUEE, par P. HEINY.
- INDUSTRIES DU BOIS, par E. BAILLEUL et J. HEURTEMATTE.
- TECHNIQUE DE L'AUTOMOBILE, par M. DELANETTE.
- TRAVAIL DES PLASTIQUES, par J. ROLLET et E. FONTAINE.
- ELECTRONIQUE APPLIQUEE, par M. BIBAL et P. HEINY.
- MATHEMATIQUES 1, par R. CLUZEL.
- MATHEMATIQUES 2, par R. CLUZEL.
- STATISTIQUE ET PROBABILITE, par P. PACE et R. CLUZEL.
- STATISTIQUE 2. Contrôle des fabrications, par P. PACE.
- CHAUDRONNERIE, par A. LETALNET, R. PASQUIER et J. TRIOULEYRE.
- MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE, par M. DELANETTE et H. DUBOIS.
- DEFORMATION PLASTIQUE DES TOLES, par R. QUATREMER.
- AUTOMATISMES 1. RESEAUX DE TRANSMISSION, par H. RIBEROL.
- AUTOMATISMES 2. CIRCUITS DE COMMUTATION, par M. ABATI et P. HEINY.
- ORGANISATION INDUSTRIELLE, par A. CHEVALIER et J. ROLLET.
- MESURES ELECTRIQUES APPLIQUEES, par M. ABATI, R. CHEVEAUX et C. ROUX.

TECHNOR, format 19,5 x 29

- DESSIN DE CONSTRUCTION MECANIQUE, par H. RIBEROL.
- TRAÇAGE EN CHAUDRONNERIE, par J. TRIOULEYRE.
- PROCEDES DE JONCTION, par J. TRIOULEYRE.
- USINAGE SUR MACHINES-OUTILS, par E. LECŒUR et J. PILARD.

PILOTE DU C.A.P.

Réf. 111, MECANICIEN-AJUSTEUR
Réf. 1111, MECANICIEN EN MECANIQUE GENERALE
Réf. 112, TOURNEUR - Réf. 113, FRAISEUR
Réf. 121, ELECTRICIEN D'EQUIPEMENT
Réf. 1112, MECANICIENS D'ENTRETIEN

© Delagrave 1962

TABLE DES MATIÈRES

I. — ARITHMÉTIQUE

Chapitre 1.

Numération décimale 1
Système des mesures légales 2
Sommes et différences 3
Produits 4
Quotients 5
Carrés - Racines carrées 6

Chapitre 2.

Caractères de divisibilité - Preuve par 9 7
Nombres premiers - Diviseurs d'un nombre 8
Nombres premiers entre eux 9
Fractions 10
Opérations sur les fractions 11
Transformation des fractions 12

Chapitre 3.

Rapports et proportions 13
Grandeurs proportionnelles 14
Intérêt - Escompte 15
Nombres complexes 16

II. — ALGÈBRE

Chapitre 1.

Addition et soustraction ..... M_1 17
Multiplication et division 18
Puissances 19
Monômes - Polynômes 20
Opérations 21
Fractions rationnelles 22

Chapitre 2.

Equations du premier degré 23
Fonction du premier degré 24
Fonction du premier degré (suite) 25
Systèmes d'équations du 1er degré 26
Problèmes relatifs à l'équation de la droite 27
Problèmes du premier degré 28

Chapitre 3.

Equations du second degré 29
Equations réductibles au second degré 30
Fonction du second degré 31
Problèmes du second degré 32
Fonctions $\frac{a}{x}$ et $\frac{ax+b}{cx+d}$ 33
Fonctions sinusoïdales 34
Fonction dérivée 35
Maximum (ou min.) d'une fonction 36

III. — CALCUL NUMÉRIQUE

Progressions 37
Logarithmes 38
Logarithmes décimaux 39
Tables de logarithmes 40
Tables de logarithmes des rapports trigonométriques 41
Calculs logarithmiques 42
Nombres normaux (Séries Renard) 43
Règle à calculs 44
Emploi de la règle à calculs 45
Abaques 46

IV. GÉOMÉTRIE PLANE ET TRIGONOMÉTRIE

Chapitre 1.

Segments de droite - Angles 47
Droites perpendiculaires - Médiatrice d'un segment 48
Triangles 49
Triangle : côtés et angles 50
Cas d'égalité des triangles 51
Parallélisme 52
Parallélogramme - Trapèze 53
Rectangle - Losange - Carré 54
Droites concourantes dans le triangle 55
Cercle 56
Angles au centre. - Arcs - Cordes 57
Angle inscrit dans un cercle 58
Lieux géométriques 59
Polygones réguliers 60
Droites et cercles tangents 61
Raccordements 62

Chapitre 2.

Théorème de Thalès 63
Figures semblables 64
Théorème de Pythagore 65
Applications aux triangles quelconques 66
Calculs relatifs aux polygones réguliers 67
Calculs relatifs au cercle 68
Constructions de longueurs données par des formules 69
Aires des figures planes 70
Aires des figures planes (suite) 71
Aires des figures semblables 72

Chapitre 3 (Trigonométrie)

Rapports trigon. des angles aigus 73
Résolution des triangles rectangles 74
Rapports trigon. des angles de 0° à 180° 75
Résolution des triangles quelconques 76
Formules de transformation 77
Equations trigonométriques simples 78

Chapitre 4.

Ellipse 79
Tracés de l'ellipse 80
Hyperbole 81
Parabole 82
Développante de cercle - Cycloïdes 83
Spirales 84

V. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Le plan 85
Parallélisme 86
Perpendicularité 87
Angles dièdres - Angles polyèdres 88
Projections orthogonales 89
Prisme-Parallélépipède 90
Pyramide 91
Volume du prisme et de la pyramide 92
Volume du tronc de prisme et du tronc de pyramide 93
Cylindre 94
Cône 95
Cône et tronc de cône 96
Sphère 97
Aires des surfaces sphériques 98
Volumes des corps sphériques 99
Solides de révolution (Th. de Guldin) 100
Sections planes des cylindres et des cônes 101
Hélice cylindrique 102

INDEX

Mots	Pages
Abaques	M_1 46
Abscisse	M_1 17
Abscisse curviligne	M_1 102
Accroissements proportionnels	M_1 25
Acier	Doc. 47
Addition	M_1 3
Addition des angles (formules de trigonométrie)	M_1 77
Air	Doc. 47
Aires	M_1 70
Adjacents (angles)	M_1 17
Agrandissement d'une figure	M_1 64
Algébrique (nombre)	M_1 17
Alliages	M_1 14
Aluminium	Doc. 47
Ammoniaque	Doc. 47
Ampère	Doc. 3
Angle : plat, droit, aigu, obtus	M_1 47
Angles : complémentaires	M_1 47
- supplémentaires	M_1 47
Angle au centre	M_1 57
Angle inscrit	M_1 58
Angle de deux droites (espace)	M_1 85
Angle d'une droite et d'un plan	M_1 85
Angle dièdre	M_1 88
Angle polyèdre	M_1 88
Antimoine	Doc. 47
Anse de panier	M_1 62
Apothème	M_1 60
Arabes (chiffres)	Doc. 1
Arc	M_1 57
Arc capable d'un angle donné	M_1 59
Arc (longueur)	M_1 68
Arche de cycloïde	M_1 83
Argent	Doc. 47
Arrangements	Doc. 9
Associative (propriété)	M_1 3-4
Asymptote	M_1 33
Axe de symétrie	M_1 48
Bande de papier (méthode de la...)	M_1 80
Bar	Doc. 3
Bicarrée (équation)	M_1 30
Binaire (système)	M_1 1
Binôme (formule du...)	Doc. 10
Bissectrice d'un angle	M_1 50
Bissectrices d'un triangle	M_1 55
Bissectrice (segments déterminés par la...)	M_1 63
Bougie	Doc. 3
Briggs	M_1 38
Bronze	Doc. 30
Calotte sphérique	M_1 98
Calorie	Doc. 3
Caoutchouc	Doc. 47
Capacités (mesure des...)	M_1 2
Caractéristique	M_1 39
Carré	M_1 54
Carré (aire du)	M_1 70
Carrés (table des)	Doc. 17
Capital (calcul du)	M_1 15
Cas d'égalité des triangles	M_1 51
Cas de similitude des triangles	M_1 64
Centre de gravité	Doc. 44
Centre de symétrie	M_1 48
Cercle	M_1 56
Cercle (périmètre du...)	M_1 68
Cercle ex-inscrit (r_a)	M_1 71
Cercle inscrit (r)	M_1 71
Cercle circonscrit (R)	M_1 71
Centigrade	M_1 47
C.G.S. (système)	Doc. 3
Cheval-vapeur	Doc. 3
Circonférence	M_1 68
Coefficient angulaire	M_1 24
Cologarithme	M_1 39
Combinaisons	Doc. 9
Complémentaires (angles)	M_1 47
Commutative (propriété)	M_1 3
Complexes (nombres)	M_1 16
Concave (polygone)	M_1 49
Concourantes (droites)	M_1 55
Cône	M_1 95
Convexe (polygone)	M_1 49
Coordonnées	M_1 24
Corde (calcul d'une...)	M_1 68
Cosinus	M_1 73
Cosinus (table des...)	Doc. 29
Cotangente	M_1 73
Cotangentes (table des...)	Doc. 31
Coulomb	Doc. 3
Cycloïde	M_1 83
Cylindre	M_1 94
Cylindre tronqué	M_1 94
Cuivre	Doc. 47
Décagone	M_1 60
Décagone (côté, apothème)	M_1 67
Décigrade	M_1 47
Degré	M_1 47
Dénominateur	M_1 10
Décimales (suppression des)	Doc. 7
Dérivées	M_1 35
Descartes	M_1 46
Développante de cercle	M_1 83
Dièdre	M_1 88
Différences	M_1 3
Différence tabulaire	M_1 40
Directrice (parabole)	M_1 82
Directrice (d'une surface)	M_1 94
Discriminant	M_1 29
Distances (géom. dans l'espace)	M_1 87
Diviseurs d'un nombre	M_1 8
Divisibilité (caractères de...)	M_1 7
Droit (angle)	M_1 47
Droite	M_1 47
Droite (demi-)	M_1 47
Droite (segment de...)	M_1 47
Dodécagone	M_1 60
Dodécagone (côté, apothème)	M_1 67
Duodécimal (système)	M_1 1
Dyne	Doc. 3
Eau	Doc. 47
Echelle logarithmique	M_1 44
Égalité	M_1 23
Ellipse	M_1 79
Epicycloïde	M_1 83
Équations	M_1 23
Équations trigonométriques	M_1 78
Équations des courbes	Doc. 12
Équidistantes (parallèles)	M_1 53
Équilatéral (triangle)	M_1 49
Erg	Doc. 3
Erreur absolue	Doc. 7
Erreur relative	Doc. 7
Escompte	M_1 15
Etain	Doc. 47
Étoilé (polygone)	M_1 60
Euclide (postulat d'...)	M_1 52
Exposant	M_1 19
Extrêmes (d'une proportion)	M_1 13

Mots	Pages
Facteur commun (mise en...)	M_1 18
Facteurs premiers	M_1 8
Factorielle	Doc. 9
Fer	Doc. 47
Flèche (d'un arc)	M_1 68
Fonction	M_1 24
Fonctions circulaires	Doc. 27
Fonction de fonction	Doc. 13
Force	Doc. 3
Fonte	Doc. 47
Foyers (ellipse)	M_1 79
Fractionnaire (exposant)	Doc. 9
Fractions	M_1 10
Fractions périodiques	M_1 12
Fractions rationnelles	M_1 22
Fuseau sphérique	M_1 98
Génératrice	M_1 95
Giorgi (système)	Doc. 3
Grade	M_1 47
Grec (alphabet)	Doc. 1
Guldin (théorème de...)	M_1 100
Hauteur	M_1 49
Haut. du tr. rectangle (calcul)	M_1 70
Haut. du tr. (calcul)	M_1 66
Hélice cylindrique	M_1 102
Hexagone	M_1 60
Hexagone (côté, apothème)	M_1 67
Homologues (éléments)	M_1 64
Homothétie	M_1 64
Hyperbole	M_1 81
Hypocycloïde	M_1 83
Hypoténuse	M_1 65
Identités	Doc. 10
Inertie (moment d')	Doc. 47
Intégrales	Doc. 13
Intérêts	M_1 15
International (système)	Doc. 2
Interpolation	M_1 40
Inverses (échelle des...)	M_1 44
Inverses (table des...)	Doc. 25 et 26
Irrationnelles (équations)	M_1 30
Irréductible (fraction)	M_1 10
Isocèle (triangle)	M_1 49
Joule	Doc. 3
Kilogrammètre	Doc. 3
Laiton	Doc. 47
Lieux géométriques	M_1 59
Lignes	M_1 1
Ligne de plus grande pente d'un plan	M_1 89
Livre sterling	M_1 16
Logarithme	M_1 39
Logarithmes (tab.)	Doc. 15
Longueurs	M_1 2
Losange	M_1 54
Losange (aire du)	M_1 70
Lumen	Doc. 3
Lux	Doc. 3
Mantisse (d'un logarithme)	M_1 39
Masse. Mesures légales. Valeurs	M_1 2
Maximum	Doc. 46
Médiane d'un triangle	M_1 36
Médianes (calcul)	M_1 49
Médiatrice	M_1 66
Médiatrices d'un triangle	M_1 48
Mile	M_1 19
Minimum	M_1 16
Minute (d'angle)	M_1 36
Minute (de temps)	M_1 47
Module d'inertie	M_1 16
Moment d'inertie	Doc. 45
Monôme	Doc. 45
Moyens (d'une proportion)	M_1 20
Moyenne proportionnelle de deux nombres	M_1 13
Moyenne proport. (constructions)	M_1 13
M.K.S.A. (syst.)	M_1 69
M.T.S. (système)	Doc. 3
Newton	Doc. 3
Nepériens (logarithmes)	M_1 42
Négatif (exposant)	Doc. 9
Nickel	Doc. 47
Niveaux (formule des trois)	Doc. 43
Nombres	M_1 1
Nombres normaux	M_1 43
Normale (à une courbe)	M_1 79
Numération décimale	M_1 1
Obliques	M_1 50
Octogone	M_1 60
Octogone (côté, apothème)	M_1 67
Onglet cylindrique	M_1 94
Onglet sphérique	M_1 98
Ordonnée	M_1 24
Opposés (nombres)	M_1 17
Orthocentre d'un triangle	M_1 55
Orthogonales (droites)	M_1 87
Orthogonales (projections)	M_1 89
Ovale	M_1 62
Ove	M_1 62
Parabole	M_1 82
Parallèles	M_1 52
Parallélépipède	M_1 90
Parallélogramme	M_1 53
Parallélogramme (aire)	M_1 70
Parmentier (formule de)	Doc. 13
Pas (hélice)	M_1 102
Pascal	Doc. 3
Pascal (triangle de...)	Doc. 10
Penny	M_1 16
Pentagone	M_1 60
Pente de l'hélice	M_1 102
Pentagone (côté, apothème)	M_1 71
Permutations	Doc. 9
Perpendiculaires	M_1 48
Perpendiculaire commune à 2 droites	M_1 89
Pied	M_1 16
Pièze	Doc. 3
Plan	M_1 85
Platine	Doc. 47
Plomb	Doc. 47
Plus grand commun diviseur	M_1 9
Plus petit commun multiple	M_1 9
Point de concours	M_1 55
Polaires (équation en coordonnées)	M_1 84
Pôle (d'un cercle)	M_1 97
Polyèdre	M_1 90
Polyèdre (angle)	M_1 88
Polygonale (ligne)	M_1 98
Polygones réguliers	M_1 60
Polynômes	M_1 20
Poncelet (formule de)	Doc. 13
Positions relatives de 2 cercles	M_1 56
Pouce	M_1 16
Pourcentages	M_1 14
Premiers (nombres)	M_1 8
Pression (unités de...)	Doc. 3
Preuve par 9	M_1 7
Primitives	Doc. 13
Prisme	M_1 90
Prisme oblique (volume)	M_1 92
Produits remarquables	M_1 21
Projections orthogonales	M_1 89
Progressions arithmétiques	M_1 37
Progressions géométriques	M_1 37
Proportions	M_1 13
Proportionnelles (grandeurs)	M_1 14

Mots	Pages
Puissances (d'un nombre alg.)	M_1 19
Puissance d'un point par rapport à un cercle	M_1 68
Puissance (unités de...)	Doc. 3
Pyramide	M_1 91
Pyramide (volume)	M_1 92
Pythagore (théorème de)	M_1 65
Quadrant	M_1 57
Quadrilatère	M_1 49
Quadrilatère inscriptible	M_1 58
Quatrième proportionnelle	M_1 13
Quotient	M_1 5
Raccordements	M_1 62
Racine carrée	M_1 6
Racines carrées (table)	Doc. 19
Radian	M_1 68
Raison (d'une progression)	M_1 37
Rapports	M_1 13
Rapport d'homothétie	M_1 64
Rapports trigonométriques	M_1 73
Rationnelles (fractions)	M_1 22
Rayon (calcul du)	M_1 68
Rayon vecteur (coord. polaires)	M_1 84
Rayons vecteurs de l'ellipse	M_1 79
Réciproque (d'un théorème)	M_1 48
Rectangle	M_1 54
Rectangle (aire du)	M_1 70
Rectification approchée d'un cercle	M_1 69
Rectiligne d'un dièdre	M_1 88
Réduction d'une figure	M_1 64
Réduites d'une fraction	M_1 12
Règle à calculs	M_1 44
Règle de proportion	M_1 14
Règle des signes	M_1 18
Relatif (nombre...)	M_1 17
Renard (Série)	M_1 43
Représentation graphique	M_1 24
Rotation des axes	Doc. 28
Seconde (d'angle)	M_1 47
Secteur circulaire	M_1 71
Secteur sphérique	M_1 99
Section droite	M_1 50
Sections planes des cylindres et des cônes	M_1 101
Segment circulaire	M_1 71
Segment parabolique	M_1 82
Segment sphérique	M_1 99
Semblables (fig.)	M_1 72
Shilling	M_1 16
Similitude (rapport de...)	M_1 64
Simpson (formule de)	Doc. 13
Sinus	M_1 73
Sinus (table des...)	Doc. 29 et 30
Sinusoïdales (fonctions)	M_1 75
Somme algébrique	M_1 17
Somme des angles d'un triangle	M_1 52
Somme des angles d'un polygone	M_1 52
Somme des termes d'une progression	M_1 37
Somme des n premiers nombres	M_1 57
Sphère	M_1 97
Sphériques (aire des surfaces)	M_1 98
Spirale d'Archimède	M_1 84
Spirale hyperbolique	Doc. 12
Spirale logarithmique	M_1 84
Spire d'une hélice	M_1 102
Sthène	Doc. 3
Substitution (méthode de...)	M_1 26
Supplémentaires (angles)	M_1 1
Surfaces coniques	M_1 95
Surfaces cylindriq.	M_1 94
Surfaces sphériq.	M_1 97
Symboles	Doc. 4
Symétrie par rapport à une droite	M_1 48
Symétrie par rapport à un point	M_1 48
Système de mesures légales	M_1 2
Systèmes d'équations	M_1 26
Tangente (trigonométrique)	M_1 73
Tangentes (table des...)	Doc. 31 et 32
Tangente au cercle	M_1 58
Tangentes communes à 2 cercles	M_1 61
Tangente à l'ellipse	M_1 79
Tangente à l'hyperbole	M_1 81
Tangente à la parabole	M_1 82
Tangente à l'hélice	M_1 102
Tangent (plan)	M_1 95
Tant pour cent	M_1 14
Tas de cailloux	M_1 93
Taux	M_1 15
Temps (mesure des...)	M_1 2
Thalès (théorème de...)	M_1 63
Théorème	M_1 47
Thermie	Doc. 3
Titre d'un alliage	M_1 14
Tore	M_1 100
Traite	M_1 15
Translation des axes	Doc. 28
Trapèze	M_1 53
Trapèze (aire du...)	M_1 70
Trapèzes (méth. des)	Doc. 13
Triangle	M_1 49
Triangle (aire du...)	M_1 70
Triangle arith. de Pascal	Doc. 10
Trièdre (angle)	M_1 88
Trièdre tri-rectangle	M_1 88
Tronc de prisme	M_1 92
Tronc de pyramide	M_1 92
Valeur absolue	M_1 17
Valeur actuelle (d'une traite)	M_1 15
Valeur approchée	Doc. 7
Valeur nominale (d'une traite)	M_1 15
Variable	M_1 24
Vecteur	M_1 17
Volt	Doc. 3
Volumes (mesure des...)	M_1 2
Watt	Doc. 3
Zinc	Doc. 47
Zone sphérique	M_1 98

Dans le présent ouvrage, les références aux normes françaises (N.F.) sont données avec l'autorisation de l'Association Française de Normalisation (Tour Europe - Cédex 7 - (92) Paris - La Défense). Nous rappelons que seules font foi les normes originales diffusées par l'A.F.NOR. dans les éditions les plus récentes.

I

ARITHMÉTIQUE

Chapitre 1

NUMÉRATION
OPÉRATIONS

Chapitre 2

DIVISIBILITÉ
NOMBRES PREMIERS
FRACTIONS

Chapitre 3

RAPPORTS
PROPORTIONS

M_1. 1 — NUMÉRATION

LES SYSTÈMES

PRINCIPE DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE (ou à base 10).

Dix unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Les **ordres** sont groupés en **classes** ; chaque classe comprend trois ordres : **unités, dizaines, centaines.**

	Classe des MILLIARDS			Classe des MILLIONS			Classe des MILLE			Classe des UNITÉS SIMPLES		
Rang	**12e**	**11e**	**10e**	**9e**	**8e**	**7e**	**6e**	**5e**	**4e**	**3e**	**2e**	**1er**
Ordre	Centaines de milliards	Dizaines de milliards	Unités de milliards	Centaines de millions	Dizaines de millions	Unités de millions	Centaines de mille	Dizaines de mille	Unités de mille	Centaines	Dizaines	Unités simples

Numération écrite.

Les nombres s'écrivent au moyen de chiffres : **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,** grâce aux conventions suivantes :

1° le premier chiffre à droite représente des unités simples ;

2° tout chiffre placé immédiatement à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes ;

3° le chiffre 0 tient la place de tout ordre qui manque.

Exemple :

564 =
4 unités + 6 dizaines + 5 centaines.

Le chiffre des dizaines a :
— pour valeur absolue 6 ;
— pour valeur relative 60.

Unités décimales.

Elles sont définies par la loi décimale :
— 10 dixièmes = 1 unité ;
— 10 centièmes = 1 dixième ;
— 10 millièmes = 1 centième.

Rang des différents ordres :

1er ordre	dixièmes
2e ordre	centièmes
3e ordre	millièmes
4e ordre	dix-millièmes
5e ordre	cent-millièmes
6e ordre	millionnièmes

Ecriture normalisée des nombres (Doc. 2).
Représentation des chiffres par des lettres.

Exemple : le nombre entier **cdu** est égal à la somme des valeurs relatives de ses chiffres.

cdu = 100 c + 10 d + u.

AUTRES SYSTÈMES DE NUMÉRATION (base différente de 10)

Système duodécimal (base 12).

Outre le zéro **(0)** il faut 11 signes ; c'est-à-dire les chiffres de **1** à **9,** plus deux signes par exemple α (10) et β (11).

Exemple : Ecriture de 527 (base **10**) dans le système à base **12.**

2e ordre, 527 : 12 = 43, reste 11 = β (1er ordre),
3e ordre, 43 : 12 = 3, reste **7** (2e ordre).

Résultat : **37**β.

La preuve : écriture de 37β (base **12**) dans le système à base **10.**

3 7 β
= 11 = 11
= 7 × 12 = 84
= 3 × 12 × 12 = 432
527

Système binaire (base 2).

Outre le zéro **(0),** un seul caractère **(1)** est nécessaire. Ce système est utilisé dans les machines à calculer électroniques.

Exemple : écriture de 34 (base **10**) dans le système à base **2.**

2e ordre, 34 : 2 = 17, reste **0** (1er ordre)
3e ordre, 17 : 2 = 8, reste **1** (2e ordre)
4e ordre, 8 : 2 = 4, reste **0** (3e ordre)
5e ordre, 4 : 2 = 2, reste **0** (4e ordre)
6e ordre, 2 : 2 = **1,** reste **0** (5e ordre)

Résultat : 100010.

La preuve : écriture de 100010 (base **2**) dans le système à base **10.**

1 0 0 0 1 0
= 0 = 0
= 1 × 2 = 2
= 0 × 2 × 2 = 0
= 0 × 2 × 2 × 2 = 0
= 0 × 2 × 2 × 2 × 2 = 0
= 1 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32
34

SYSTÈME DE MESURES LÉGALES

UNITÉS — MULTIPLES — SOUS-MULTIPLES

M_1. 2

LONGUEURS (L)

Unité de base.

Longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86.

Nom	Symbole	Valeur
millimicron	*mμ*	0,000 001 *mm*
micron	*μ*	0,001 *mm*
millimètre	*mm*	0,001 *m*
centimètre	*cm*	0,01 *m*
décimètre	*dm*	0,1 *m*
mètre	*m*	1 *m*
décamètre	*dam*	10 *m*
hectomètre	*hm*	100 *m*
kilomètre	*km*	1 000 *m*

SURFACES (S)

Unité principale : le **mètre carré** (m^2).

1 m^2 = surface d'un carré de côté 1 *m*.

Mesures agraires : l'are (*a*) = 100 m^2, le centiare (*ca*) et l'hectare (*ha*).

Nom	Symbole	Valeur
millimètre carré	mm^2	0,000 001 m^2
centimètre carré	cm^2	0,000 1 m^2
décimètre carré	dm^2	0,01 m^2
mètre carré	m^2	1 m^2
décamètre carré	dam^2	100 m^2
hectomètre carré	hm^2	10 000 m^2
kilomètre carré	km^2	1 000 000 m^2

VOLUMES (V)

Unité principale : le **mètre cube** (m^3).

1 m^3 = volume d'un cube d'arête 1 *m*.

Nom	Symbole	Valeur
millimètre cube	mm^3	0,000 000 001 m^3
centimètre cube	cm^3	0,000 001 m^3
décimètre cube	dm^3	0,001 m^3
mètre cube	m^3	1 m^3

Mesure des bois de chauffage : le stère (*st*) = 1 m^3, le décistère (*dst*) = 0,1 *st*.

MASSES (M)

Unité de base :

— le **kilogramme** *(kg)*.

Masse du prototype en platine iridié qui a été sanctionné par la Conférence générale des poids et mesures tenue à Paris en 1889 et qui est déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres.

Nom	Symbole	Valeur
milligramme	*mg*	0,001 *g*
centigramme	*cg*	0,01 *g*
décigramme	*dg*	0,1 *g*
gramme	*g*	1 *g*
décagramme	*dag*	10 *g*
hectogramme	*hg*	100 *g*
kilogramme	*kg*	1 000 *g*

CAPACITÉS (C)

Unité principale : le **litre** (*l*).

1 *l* = volume occupé par 1 dm^3 d'eau (à 4 °C et sous la pression atmosphérique normale).

Nom	Symbole	Valeur
millilitre	*ml*	0,001 *l*
centilitre	*cl*	0,01 *l*
décilitre	*dl*	0,1 *l*
litre	*l*	1 *l*
décalitre	*dal*	10 *l*
hectolitre	*hl*	100 *l*

TEMPS (T)

Unité de base : la **seconde** *(s)*.

Fraction 1/31 556 925,974 7 de l'année tropique pour 1900 janvier zéro à 12 heures de temps des éphémérides.

Nom	Symbole	Valeur
seconde	*s*	1 *s*
minute	*mn*	60 *s*
heure	*h*	3 600 *s*
jour	*j*	24 *h*
déciheure	*dh*	0,1 *h*
centiheure	*ch*	0,01 *h*
milliheure	*mh*	0,001 *h*

ECRITURE NORMALISEE : Voir Doc. 1 : Ecriture et Doc. 2 : Nombres normaux.

M_1. 3 — SOMMES ET DIFFÉRENCES

SOMME DE PLUSIEURS NOMBRES

Nombre obtenu en réunissant les unités des nombres donnés.

L'**addition** est l'opération qui permet de calculer la somme de plusieurs nombres (ces nombres sont les **termes** de la somme).

Propriété commutative des sommes.

La somme de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre de ces nombres.

Exemple : $7 + 9{,}5 + 3 = 3 + 7 + 9{,}5$.

Propriété associative des sommes.

1° **On peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.**

$4 + 11 + 17 = (4 + 17) + 11 = 21 + 11$

La somme effectuée s'écrit entre ( ).

2° **Inversement, on peut remplacer un terme d'une somme par plusieurs autres dont ce terme est la somme :**

$9 + 25 = 9 + (12 + 13) = 9 + 12 + 13$

DIFFÉRENCE DE DEUX NOMBRES

Nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand.

La **soustraction** est l'opération qui permet de calculer la différence de deux nombres (ces nombres sont les **termes** de la différence).

La différence a — b est égale à c parce que la somme b + c est égale à a.

Donc :

$a = b + c$ entraîne $a - b = c$

Propriétés des différences.

La différence de deux nombres ne change pas quand on ajoute, ou que l'on retranche, un même nombre aux deux termes :

$$\left\{\begin{array}{l} 19 - 7 = (19 + 4) - (7 + 4) \\ \mathbf{a - b = (a + n) - (b + n)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 19 - 7 = (19 - 5) - (7 - 5) \\ \mathbf{a - b = (a - n) - (b - n)} \end{array}\right.$$

ADDITION, OU SOUSTRACTION, D'UNE SOMME ET D'UNE DIFFÉRENCE

On peut effectuer d'abord la somme (ou la différence), puis l'ajouter au nombre, (ou la retrancher de celui-ci).

Mais on peut également appliquer l'une des règles suivantes :

Ajouter une somme à un nombre.

$18 + (7 + 4 + 5)$

$18 + 7 = 25$
$25 + 4 = 29$
$29 + 5 = \mathbf{34}$

En généralisant, on a :

$$a + (b + c + d) = (a + b) + c + d$$
$$= (a + b + c) + d$$
$$\mathbf{a + (b + c + d) = (a + b + c + d)}$$

Ajouter une différence à un nombre.

$29 + (11 - 5)$

$29 + 11 = 40$
$40 - 5 = \mathbf{35}$

En généralisant, on a :

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$
$$\mathbf{a + (b - c) = (a + b - c)}$$

Retrancher une somme d'un nombre.

$30 - (9 + 17)$

$30 - 9 = 21$
$21 - 17 = \mathbf{4}$

En généralisant, on a :

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$
$$\mathbf{a - (b + c) = (a - b - c)}$$

Retrancher une différence d'un nombre.

$27 - (12 - 5)$

$27 + 5 = 32$
$32 - 12 = \mathbf{20}$

En généralisant on a :

$$a - (b - c) = (a + c) - b$$
$$\mathbf{a - (b - c) = (a + c - b)}$$

POLYNÔME ARITHMÉTIQUE

Suite de nombres séparés par les signes + et —, les opérations à effectuer étant toutes possibles dans l'ordre indiqué. Ex. $24 + 5 - 3 - 17 + 2$ (valeur 11).

Ajouter un polynôme à un nombre.

$27 + (12 - 4 + 10) = 27 + 12 - 4 + 10$
$= \mathbf{45}$

En généralisant, on a :

$$\mathbf{a + (b - c + d) = a + b - c + d}$$

Donc, on peut supprimer une parenthèse précédée du signe + ;
ou inversement, on peut introduire une parenthèse après un signe +.

Retrancher un polynôme d'un nombre.

$32 - (10 + 4 - 8) = 32 - 10 - 4 + 8$
$= \mathbf{26}$

En généralisant, on a :

$$\mathbf{a - (b + c - d) = a - b - c + d}$$

Donc : on peut supprimer une parenthèse précédée du signe — à la condition de changer les signes des termes compris dans la parenthèse ; ou inversement...

PRODUITS

M_1. 4

PRODUIT D'UN NOMBRE ENTIER OU DÉCIMAL par un NOMBRE ENTIER

A (multiplicande) × B (multiplicateur). C'est la somme de B nombres égaux à A. A et B sont les facteurs du produit.

La multiplication est l'opération qui permet de calculer le produit de deux nombres.

Exemple :

$7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$

Le produit de A par B s'écrit A × B ou AB.

PRODUIT D'UN NOMBRE ENTIER OU DÉCIMAL par un NOMBRE DÉCIMAL

Exemple : $18 \times 2{,}7$.

Il est égal à 27 fois le dixième de 18, c'est-à-dire à $1{,}8 \times 27 = 48{,}6$.

PRODUIT DE PLUSIEURS NOMBRES A, B, C...

S'obtient en multipliant A par B, puis le produit obtenu par C..., et ainsi de suite jusqu'à épuisement des facteurs.

PROPRIÉTÉ COMMUTATIVE

1° Le produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.

$$29 \times 5 = 5 \times 29 \quad (= 145)$$
$$\mathbf{a \times b = b \times a}$$

2° Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des deux derniers :

$$7 \times 4 \times 2 \times 8 = 7 \times 4 \times 8 \times 2$$
$$\mathbf{a \times b \times c \times d = a \times b \times d \times c.}$$

3° Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre de deux facteurs consécutifs.

$$3 \times 7 \times 9 \times 12 = 3 \times 9 \times 7 \times 12$$
$$\mathbf{a \times b \times c \times d = a \times c \times b \times d}$$

4° Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

$$9 \times 3 \times 6 \times 0{,}4 = 0{,}4 \times 6 \times 3 \times 9$$
$$\mathbf{a \times b \times c \times d = d \times b \times c \times a}$$

PROPRIÉTÉ ASSOCIATIVE

Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.

$$7 \times 4 \times 3 \times 9 = 21 \times 4 \times 9$$
$$\mathbf{a \times b \times c \times d = (a \times c) \times b \times d}$$

(les parenthèses indiquent que le produit a × c a été effectué).

PRODUIT D'UNE SOMME ou D'UNE DIFFÉRENCE par un NOMBRE

$$(7 + 4) \times 5 = 35 + 20$$
$$(19 - 12) \times 4 = 76 - 48$$

Généralisation :

$$\mathbf{(a + b) \times m = a \times m + b \times m}$$
$$\mathbf{(a - b) \times m = a \times m - b \times m}$$

De même :

$$\mathbf{m \times (a + b) = m \times a + m \times b}$$
$$\mathbf{m \times (a - b) = m \times a - m \times b}$$

PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES ARITHMÉTIQUES

On multiplie chaque terme de l'un par chaque terme de l'autre et l'on fait précéder chaque produit partiel :

1° du signe +, si les 2 termes sont précédés du même signe ;

2° du signe —, si les 2 termes ne sont pas précédés du même signe.

(Le signe + est sous-entendu devant les premiers termes.)

$$(7 + 5) \times (16 - 4) =$$
$$7 \times 16 + 5 \times 16 - 7 \times 4 - 5 \times 4$$

Généralisation :

$$\mathbf{(a + b - c) \times (d - e) =}$$
$$\mathbf{a \times d + b \times d - c \times d - a \times e - b \times e + c \times e}$$

PRODUIT D'UN PRODUIT DE FACTEURS par un NOMBRE

On multiplie **un seul** des facteurs :

$$(7 \times 4 \times 9) \times 3 = 7 \times (4 \times 3) \times 9$$
$$= 7 \times 12 \times 9$$

Généralisation (un facteur, au choix) :

$$\mathbf{(a \times b \times c) \times m = (a \times m) \times b \times c}$$

De même :

$$\mathbf{m \times (a \times b \times c) = (m \times a) \times b \times c}$$

PRODUIT DE PLUSIEURS PRODUITS DE FACTEURS

On forme un produit unique contenant tous les facteurs :

$$(4 \times 5) \times (2 \times 8 \times 7) = 4 \times 5 \times 2 \times 8 \times 7$$

Généralisation :

$$\mathbf{(a \times b) \times (c \times d \times e) = a \times b \times c \times d \times e}$$

M_1. 5 — QUOTIENTS

QUOTIENT DE DEUX NOMBRES ENTIERS

D (dividende) : **d** (diviseur).

C'est le plus grand nombre entier **q** dont le produit par le diviseur peut se retrancher du dividende.

La division est l'opération qui permet de calculer le quotient de deux nombres.

Exemples.

1° Quotient de 56 par 4?

$4 \times 14 = 56.$

D'où **q** = 14 (quotient exact de 56 par 4).

2° Quotient de 39 par 4?

$4 \times 9 = 36 < 39$

$4 \times 10 = 40 > 39.$

D'où **q** = 9 (quotient à une unité près par défaut de 39 par 4; reste 39 — 36 = 3).

Généralisation. Quotient de D par **d**?

1° Si $d \times q = D$,

q est le quotient exact de D par **d**.

2° Si $d \times q < D$

et $d \times (q + 1) > D$,

q est le quotient à une unité près par défaut de D par **d**.

Le reste est

$D - d \times q = r.$

RESTE DE LA DIVISION

de deux nombres entiers

1. **Tout nombre qui divise deux autres nombres divise aussi le reste de leur division.**

$102 = 15 \times 6 + 12; \quad 12 < 15$

Le nombre 3, qui divise 102 et 15, divise aussi le reste 12.

$D = dq + r; \quad r < d$

Tout diviseur de D et **d** et un diviseur de **r**.

2. **Si l'on multiplie (ou divise) le dividende et le diviseur d'une division par un même nombre, le quotient ne change pas, mais le reste est multiplié (ou divisé) par ce nombre.**

$35 = 12 \times 2 + 11; \quad 11 < 12$

Après multiplication par 3 de 35 et 12 :

$105 = 36 \times 2 + 33; \quad 33 < 36$

Même quotient 2. Reste multiplié par 3

$D = dq + r; \quad r < d$

Après multiplication par **n** de D et d :

$Dn = (dn)\, q + rn; \quad rn < dn$

Même quotient **q**. Reste multiplié par **n**.

RELATIONS ENTRE D, d, q ET r

1° Le dividende est égal (cas du quotient exact) ou supérieur à $d \times q$, mais inférieur à $d \times (q + 1)$:

$$\boxed{d \times q \leqslant D < d \times (q + 1)}$$

2° Le dividende est égal au produit $d \times q$, augmenté du reste r.

$$\boxed{D = d \times q + r}$$

Mais, d'après le 1° :

$$d \times q + r < d \times (q + 1)$$

ou $\boxed{r < d}$

QUOTIENT À UNE UNITÉ DÉCIMALE PRÈS

De deux nombres entiers

Ex. 462 : 29, à un dixième près.

C'est le plus grand nombre de dixièmes dont le produit par le diviseur peut se retrancher du dividende.

Le quotient de 4620 (dixièmes) par 29 est 159 dixièmes (reste 9).

Le quotient à un dixième près de 462 par 29 est donc 15,9.

De deux nombres décimaux

Ex. : 38,4; 2,65 à un dixième près.

C'est **le même** que celui de 3840 par 265, c'est-à-dire 14,1.

SOMMES, DIFFÉRENCES ET PRODUITS

(à diviser par des nombres)

(Tous les quotients étant exacts.)

Si $a = bq$, on dit que **a** est divisible par **b**, ou que **a** est multiple de **b**.

Inversement, on dit que **b** est un diviseur de **a**, ou que **b** est un sous-multiple de **a**.

Somme (ou différence) : Nombre

$(48 + 12) : 6 = 8 + 2$

$(39 - 15) : 3 = 13 - 5$

$$\frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} \qquad (1)$$

$$\frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} \qquad (2)$$

Inversement, tout nombre qui divise plusieurs autres nombres divise aussi leur somme (1) et leur différence (2).

Produit de facteurs : Nombre

$(48 \times 7) : 4 = 12 \times 7$

$$\frac{a \times b}{m} = \frac{a}{m} \times b \qquad (3)$$

Inversement, tout nombre qui divise un autre nombre divise aussi les multiples de celui-ci (3).

CARRÉS • RACINES CARRÉES

DÉFINITIONS

1. **Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même.**

Carré de 8 $= 8 \times 8 = 8^2 = 64$

Carré de a $= a.a = a^2$.

Les carrés des nombres entiers sont dits **« carrés parfaits ».**

1	2	3	4	5	6	7	...
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	...

2. **La racine carrée d'un nombre est un autre nombre dont le carré est égal au premier nombre :**

$\sqrt{196} = 14$ et $\sqrt{a^2} = a$.

3. **La racine carrée à une unité près par défaut d'un nombre entier est le plus grand nombre entier dont le carré peut se retrancher du premier.**

Racine carrée (a) de 32 (N) ?

$5^2 = 25$ et $6^2 = 36$.

D'où a = 5, racine carrée à une unité près de N = 32. Le reste $r = 32 - 25 = 7$.

Si $a^2 < N$ et $(a + 1)^2 > N$,

le nombre a est la racine carrée à une unité près par défaut de N.

Le reste est $r = N - a^2$.

RELATIONS ENTRE N, a et r.

1. Le nombre N est égal ou supérieur à a^2, mais inférieur à $(a + 1)^2$:

$$\boxed{a^2 \leqslant N < (a + 1)^2}$$

2. Le nombre N est égal à $a^2 + r$:

$$\boxed{N = a^2 + r}$$

d'où $a^2 + r < a^2 + 2a + 1$.

$$\boxed{r \leqslant 2a}$$

4. **La racine carrée à un dixième, à un centième... près par défaut d'un nombre entier est le plus grand nombre de dixièmes, de centièmes... dont le carré peut se retrancher du nombre donné.**

Ex : La racine à un dixième près de 39 est 6,2 parce que :

$6{,}2^2 = 38{,}44 < 39$ et $6{,}3^2 = 39{,}69 > 39$

5. **La racine carrée à une unité près d'un nombre décimal est la même que celle de sa partie entière.**

Ex : La racine carrée à une unité près de 45,2 est la même que celle de 45.

TABLE DES RACINES CARRÉES

(Voir Doc. 19 et 20.)

EXTRACTION D'UNE RACINE CARRÉE

21.73	46
16	
57.3	$87 \times 7 = 609$
51 6	$86 \times 6 = 516$
5 7	

Exemple :

$\sqrt{2\,173} = du$

d = ch. des dizaines

u = ch. des unités

Chiffre d des dizaines de la racine. C'est la racine des centaines (21).

En effet $a^2 \leqslant 21 < (a + 1)^2$

s'écrit : $(10\,a)^2 \leqslant 2\,100 < [10(a + 1)]^2$

ou $(10\,a)^2 < 2\,173 < [10(a + 1)]^2$

Chiffre u des unités de la racine.

$2\,173 = (10\,d + u)^2 + r$

$2\,173 = (10\,d)^2 + (d \times 2 \times 10)\,u + u^2 + r$

$2\,173 - (10\,d)^2 = (d \times 2 \times 10)\,u + u^2 + r$

$573 = (d \times 2 \times 10)\,u + u^2 + r$

Le quotient de 573 par 20 d est donc, soit u, soit (u — 1), soit (u — 2).....

Le quotient de 573 par 20 d, ou celui de 57 par 2 d, est égal à 7.

1er essai :

$(4 \times 2 \times 10) \times 7 + 7^2 = 80 \times 7 + 7^2$

$= 80 + 7 \times 7 = 609$

Puisque 609 > 573, le chiffre 7 est trop fort.

2e essai :

$86 \times 6 = 516 < 573$.

Donc le chiffre 6 convient.

Résultat : $\sqrt{2\,173} = \mathbf{46}$ à une unité près par défaut ; le reste est 57.

Pratique de l'opération.

1. *Partager le nombre en tranches de 2 chiffres, à partir de la droite.*
2. *Extraire la racine carrée de la dernière tranche de gauche* $d = \sqrt{21} = 4$ *(dizaines).*
3. *Elever 4 au carré (16 centaines) et retrancher du nombre 2173. Reste 573.*
4. *Doubler la racine :* $4 \times 2 = 8$ *et séparer un chiffre (3) sur la droite du reste.*
5. *Diviser 57 par 8 et écrire le quotient 7 à droite de 8.*
6. *Multiplier 87 par 7. Produit 609* $>$ *573 ; donc 7 est trop grand.*
7. *Essayer le chiffre 6. Produit 516* $<$ *573 ; donc 6 convient.*
8. *Retrancher 516 de 573. Reste 57.*

Autre exemple :

Racine à 1 dixième près de $\sqrt{53\,704}$.

5 37 04	231,7
1 37	
08 04	43×3
3 43 **00**	461×1
19 11	$4\,627 \times 7$

Pour le chiffre des dixièmes de la racine (ici 7), abaisser une tranche de deux zéros, etc.

M_1. 7 — CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

PAR 2 et 5

Le nombre **N** = **10 d** + **u** est la somme de deux termes :

— l'un **10 d** divisible par 10, donc par 2 et par 5 ;

— l'autre **u**.

● Si **u** est égal à zéro ou à 2, 4, 6, 8 (chiffres pairs), ces derniers sont divisibles par 2.

Donc la somme **10 d** + **u** est divisible par 2. **Un nombre est divisible par 2 s'il est terminé par zéro ou un chiffre pair.**

● Si **u** est égal à 5, la somme **10 d** + **u** est divisible par 5.

Un nombre est divisible par 5 s'il est terminé par un zéro ou par un 5.

Exemples :

Sont divisibles par 2 les nombres : 826, 2010 ...

Sont divisibles par 5 les nombres : 7045, 8120 ...

PAR 4 et 25

Le nombre **N** = **100 c** + **du** est la somme de deux termes :

— l'un **100 c** divisible par 100, donc par 4 et par 25.

— l'autre **du**.

● Si **du** = 00, le nombre N est divisible par 100, donc par 4 et 25.

● Si **du** est divisible par 4, la somme **100 c** + **du** est divisible par 4.

Un nombre est divisible par 4 s'il est terminé par deux zéros ou si ses deux derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par 4.

● Si **du** est divisible par 25, la somme 100 c + du est divisible par 25.

Un nombre est divisible par 25 s'il est terminé par deux zéros, ou si ses deux derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par 25 *(ce dernier nombre est alors 25, ou 50 ou 75).*

PAR 9

Reste de la division par 9 :

Nombres 10, 100, 1 000 ...

10 = 9 + 1, reste **1**
100 = 99 + 1, reste **1**
1 000 = 999 + 1, reste **1**

Ce sont des multiples de 9, **plus 1.**

Un chiffre significatif suivi de zéros.

300 = 100 × 3
= (mult. de 9 + 1) × 3
= mult. de 9 + **3**

Ce sont des multiples de 9, **plus le chiffre significatif.**

Nombre quelconque (547)·

500 = mult. de 9 + 5
40 = mult. de 9 + 4
7 = 7

547 = mult. de 9 + 16
= mult. de 9 + **7**

Le nombre 547 n'est pas divisible par 9, car la somme de ses chiffres (16) n'est pas divisible par 9.

Un nombre est divisible par 9, lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

PREUVE PAR 9 DES OPÉRATIONS

Multiplication

672 — par 9, reste 6
35 — reste 8
3 360 — produit des restes 48
20 16
23 520 — 48 par 9, reste 3 / par 9, reste 3 \ EXACT

Division

734 | 17 — par 9, reste 8
054 | 43 — par 9, reste 7
3 | produit des restes 56
56 par 9, reste 2 / par 9, reste 3 \ 5 / par 9, reste 5 \ EXACT

Racine carrée

7 413 | 86 — par 9, reste 5
1 013 | 166 × 6 — carré du reste 25
017 — 25 par 9, reste 7 / par 9, reste 8 \ 15
15 par 9, reste 6 / par 9, reste 6 \ EXACT

NOMBRES PREMIERS DIVISEURS D'UN NOMBRE

M_1. 8

NOMBRES PREMIERS

Un nombre est premier s'il n'admet pour diviseur que lui-même et l'unité.

Théorème.

Tout nombre non premier admet au moins un diviseur premier.

(On démontre que le plus petit des diviseurs — autre que 1 — est premier.)

Théorème.

La suite des nombres premiers est illimitée.

TABLE DES NOMBRES PREMIERS

DOC. 6 : nombres premiers de 1 à 2 969.

(Pour obtenir une telle table, on a écrit la suite naturelle des nombres entiers, puis supprimé, dans cette liste, les multiples de 2, puis ceux de 3, de 5...)

Pour reconnaître si un nombre N est premier, on consulte la table.

Si l'on ne dispose pas d'une table, on cherche, en s'aidant si possible des caractères de divisibilité, si le nombre N est divisible par un nombre premier.

Ex. : N = 157.

157 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13.
Dans cette dernière division : $11 < 13$ ($q < d$).
Il est inutile de poursuivre les essais : N est premier.

157	13
27	11
14	

DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN SES FACTEURS PREMIERS

On démontre que cette décomposition est possible et qu'elle conduit toujours au même résultat, quel que soit l'ordre des divisions successives.

Ex. : N = 180.

180 (div. par 2) $= 2 \times 90$
90 (div. par 2) $= 2 \times 45$ ou $180 = 2^2 \times 45$
45 (div. par 3) $= 3 \times 15$ ou $180 = 2^2 \times 3 \times 15$
15 (div. par 3) $= 3 \times 5$ ou $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$$\boxed{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$$

D'une manière générale :

$$N = a^m \times b^n \times c^p \ldots$$

(a, b, c étant des nombres premiers).

Disposition pratique

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

DIVISEURS D'UN NOMBRE

Théorème.

Si un nombre est divisible par un autre, il contient tous les facteurs premiers de cet autre avec des exposants au moins égaux.

Réciproque.

Si un nombre contient tous les facteurs premiers d'un autre avec des exposants au moins égaux, il est divisible par cet autre.

Ex. : $560 = 2^3 \times 5 \times 7$
est divisible par :
$35 = 5 \times 7$.

Pour reconnaître si un nombre est divisible par un autre, on peut donc examiner les facteurs premiers qu'ils contiennent.

RECHERCHE DES DIVISEURS D'UN NOMBRE

décomposé en ses facteurs premiers.

Exemple : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Il s'agit de trouver tous les nombres formés avec un ou plusieurs facteurs du tableau ci-dessous :

1	2	2^2	(1re ligne)
1	3	3^2	(2e ligne)
1	5		(3e ligne)

1° Produit 1re ligne par 2e ligne :

$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$2^2 \times 1 = 4$
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$2^2 \times 3 = 12$
$1 \times 3^2 = 9$	$2 \times 3^2 = 18$	$2^2 \times 3^2 = 36$

2° Produit du tableau ci-dessus par 3e ligne (la multiplication par 1 reproduit ce tableau).

$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$4 \times 5 = 20$
$3 \times 5 = 15$	$6 \times 5 = 30$	$12 \times 5 = 60$
$9 \times 5 = 45$	$18 \times 5 = 90$	$36 \times 5 = 180$

Disposition pratique : Ecrire le diviseur 1, puis multiplier chaque facteur par tous les diviseurs déjà écrits.

		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3. 6. 12
15	3	9. 18. 36
5	5	5. 10. 20. 15. 30. 60
1		45. 90. 180

Nombre des diviseurs de :

$$N = a^m \times b^n \times c^p$$

(calcul résultant du premier mode de formation indiqué ci-dessus) :

$$\boxed{(m+1)(n+1)(p+1).}$$

Exemple : $N = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
Nombre des diviseurs :
$(2+1)(2+1)(1+1) = 3 \times 3 \times 2$
$= 18$

M_1. 9 — NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

P.G.C.D. et P.P.C.M.

1. DÉFINITIONS

Des nombres sont premiers entre eux s'ils n'admettent aucun diviseur commun (autre que 1).

Ex. : 15 et 4
10, 8 et 49.

Plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux si chacun d'eux est premier avec chacun des autres.

Ex. : 10, 9 et 49
(et non 10, 8 et 49).

Théorème.

Si un nombre est divisible par plusieurs autres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.

Ex. : Si N est divisible par :
7, 8 (ou 2^3) et 15 (ou 3×5),
il est aussi divisible par :
$7 \times 8 \times 15$ (ou $7 \times 2^3 \times 3 \times 5$) ou 840.

Application.

Pour reconnaître si un nombre est divisible par 6 ($= 2 \times 3$), on examine s'il est divisible par 2 et par 3.

2. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR (P.G.C.D.)

de plusieurs nombres :

C'est le plus grand nombre qui les divise tous exactement.

On le forme en faisant le produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres, chacun étant affecté de son plus faible exposant.

Ex. $\begin{cases} 168 = 2^3 \times 3 \times 7 \\ 552 = 2^3 \times 3 \times 23 \end{cases}$

P.G.C.D. $= 2^3 \times 3 = 24$.

Propriétés.

1° Le p.g.c.d. de plusieurs nombres premiers entre eux est égal à 1.

Ex : 6 et 25 ont pour p.g.c.d. 1.

2° Lorsqu'on multiplie (ou divise) plusieurs nombres par un même nombre, leur p.g.c.d. est multiplié (ou divisé) par ce nombre.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 25 \\ 15 \end{matrix}\right.$ P.g.c.d. 5 $\left|\begin{matrix} 25 \times 6 = 150 \\ 15 \times 6 = 90 \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} \text{P.g.c.d.} \\ 5 \times 6 = \mathbf{30} \end{matrix}\right.$

3° Cas particulier : lorsqu'on divise plusieurs nombres par leur p.g.c.d. les quotients obtenus sont premiers entre eux.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 54 \\ 72 \end{matrix}\right.$ P.g.c.d. 18 $\left|\begin{matrix} 54 : 18 = 3 \\ 72 : 18 = 4 \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} \text{Premiers} \\ \text{entre eux} \end{matrix}\right.$

4° Pour trouver tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, on cherche les diviseurs de leur p.g.c.d.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 144 \\ 54 \end{matrix}\right.$ Chercher les diviseurs de leur p.g.c.d. 18. (M_1. 8)

3. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (P.P.C.M.)

de plusieurs nombres :

C'est le plus petit nombre qui soit divisible par ces nombres.

On le forme en faisant le produit de tous les facteurs premiers communs et non communs à ces nombres, chacun étant affecté de son plus fort exposant.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 18 = 2 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{matrix}\right.$

P.P.C.M. $= 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

Propriétés.

1° Le p.p.c.m. de deux nombres premiers entre eux est égal à leur produit.

Ex. : 8 et 15 ont pour p.p.c.m. 120.

Même propriété pour plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux.

2° Lorsqu'on multiplie (ou divise) plusieurs nombres par un même nombre, leur p.p.c.m. est multiplié (ou divisé) par ce nombre.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 32 \\ 80 \end{matrix}\right.$ P.p.c.m. 160 $\left|\begin{matrix} 32 : 2 = 16 \\ 80 : 2 = 40 \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} \text{P.p.c.m.} \\ 160 : 2 = \mathbf{80} \end{matrix}\right.$

3° Cas particulier : lorsqu'on divise le p.p.c.m. de plusieurs nombres par ces nombres, les quotients obtenus sont premiers entre eux.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 36 \\ 120 \end{matrix}\right.$ P.p.c.m. 360 $\left|\begin{matrix} 360 : 36 = 10 \\ 360 : 120 = 3 \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} \text{Premiers} \\ \text{entre eux} \end{matrix}\right.$

4° Pour trouver tous les multiples communs à plusieurs nombres, on écrit les multiples de leur p.p.c.m.

Ex. $\left\{\begin{matrix} 36 \\ 60 \end{matrix}\right.$ Écrire les multiples de leur p.p.c.m. 180.

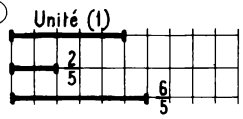
Théorème. **Le produit du p.g.c.d. de deux nombres par leur p.p.c.m. est égal au produit des deux nombres.**

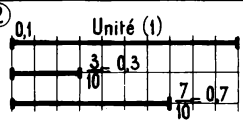
Ex. : Les nombres 25 et 30.

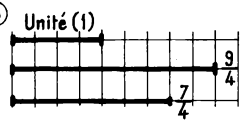
$\left\{\begin{matrix} 25 = 5^2 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} \text{P.g.c.d.} = 5 \\ \text{P.p.c.m.} = 2 \times 3 \times 5^2 = 150 \\ 5 \times 150 = 25 \times 30 = \mathbf{750}. \end{matrix}\right.$

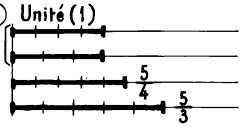
FRACTIONS

M_1. 10

① 

② 

③ 

④ 

DÉFINITION — Symbole permettant d'écrire la mesure d'une grandeur lorsqu'une grandeur de même espèce est prise pour unité.

Exemple $\frac{2}{5} \longrightarrow \frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$ (ou termes de la fraction) $= \frac{N}{D}$.

Fraction décimale. Fraction dont le dénominateur est 10, 100 ,1 000... Toute fraction décimale peut s'écrire sous la forme d'un nombre décimal (fig. 2).

Exemple $\frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad \frac{7}{10} = 0{,}7 \qquad \frac{147}{100} = 1{,}47$

Comparaison des fractions à l'unité.

$N < D$	$N = D$	$N > D$
fraction < 1	fraction $= 1$	fraction > 1
Ex. $\frac{3}{7}$	Ex. $\frac{5}{5}$	Ex. $\frac{8}{3}$

Comparaison de deux fractions.

même dénominateur : $\frac{N}{D}$ et $\frac{N'}{D}$

Si $N > N'$, on a $\frac{N}{D} > \frac{N'}{D}$

Ex. (fig. 3) : $\frac{9}{4} > \frac{7}{4}$

même numérateur : $\frac{N}{D}$ et $\frac{N}{D'}$

Si $D > D'$, on a $\frac{N}{D} < \frac{N}{D'}$

Ex. (fig 4) : $\frac{5}{4} < \frac{5}{3}$

SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

Théorème.

Quand on multiplie, ou divise, les deux termes d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale à la première.

$$\frac{N \times m}{D \times m} = \frac{N}{D} \qquad \frac{N : m}{D : m} = \frac{N}{D}$$

Exemple : $\frac{10}{15} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

Fraction irréductible (non simplifiable).

Théorème.

Si une fraction est égale à une fraction irréductible, ses termes sont des équimultiples des termes de la fraction irréductible.

$\frac{a}{b}$ irréductible et $\frac{N}{D} = \frac{a}{b}$ entraîne $\begin{cases} N = a \times k \\ D = b \times k \end{cases}$

Exemple : $\frac{N}{D} = \frac{5}{9} = \frac{5 \times k}{9 \times k}$

Théorème.

Si une fraction est irréductible, ses termes sont premiers entre eux.

Réciproque. Si une fraction a ses termes premiers entre eux, elle est irréductible.

Conséquence. Pour rendre une fraction irréductible, on divise ses deux termes par leur p.g.d.c.

Exemple : $\frac{54}{72} = \frac{54 : 18}{72 : 18} = \frac{3}{4}$

(3 et 4 sont premiers entre eux : M_1. 9).

RÉDUCTION DES FRACTIONS

au même dénominateur.

Exemple $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{1}{4}$

1re méthode. On peut multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres fractions.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 10 \times 4}{5 \times 10 \times 4} = \frac{120}{200}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \times 5 \times 4}{10 \times 5 \times 4} = \frac{140}{200}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 5 \times 10}{5 \times 10 \times 4} = \frac{50}{200}$$

2e méthode. On prend pour dénominateur commun le p.p.c.m. des dénominateurs des fractions. Dans l'exemple ci-dessus : 20.

On multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient de 20 par le dénominateur de la fraction :

$20 : 5 = 4$	$\frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$
$20 : 10 = 2$	$\frac{7 \times 2}{10 \times 2} = \frac{14}{20}$
$20 : 4 = 5$	$\frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20}$

M_1. 11 OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

ADDITION

Réduire les fractions au même dénominateur, additionner les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

Ex. • $\frac{3}{7} + \frac{8}{15} = \frac{45}{105} + \frac{56}{105} = \frac{101}{105}$

• $9 + \frac{2}{7} = \frac{63}{7} + \frac{2}{7} = \frac{65}{7}$.

Inversement : extraire les entiers de $\frac{78}{5}$ (diviser 78 par 5 ; quotient 15, reste 3).

$$\frac{78}{5} = 15 + \frac{3}{5}.$$

SOUSTRACTION

Réduire les fractions au même dénominateur, retrancher les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

Ex. • $\frac{18}{5} - \frac{4}{7} = \frac{126}{35} - \frac{20}{35} = \frac{106}{35}$

• $12 - \frac{11}{6} = \frac{72}{6} - \frac{11}{6} = \frac{61}{6}$

• $\frac{37}{15} - 2 = \frac{37}{15} - \frac{30}{15} = \frac{7}{15}$

MULTIPLICATION

a) **Fraction × nombre entier.**

Multiplier le numérateur par le nombre et conserver le dénominateur.

Ex. $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$.

Ou, si possible, diviser le dénominateur par le nombre et conserver le numérateur.

Ex. $\frac{7}{15} \times 3 = \frac{7}{15 : 3} = \frac{7}{5}$

b) **Nombre entier × fraction.**

Multiplier le nombre par le numérateur de la fraction et conserver le dénominateur.

Ex. $7 \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{4} = \frac{21}{4}$

c) **Fraction × fraction.**

Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Ex. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

DIVISION

a) **Fraction : nombre entier.**

Multiplier le dénominateur par le nombre et conserver le numérateur.

Ex. $\frac{9}{7} : 2 = \frac{9}{7 \times 2} = \frac{9}{14}$

Ou, si possible, diviser le numérateur par le nombre et conserver le dénominateur.

Ex. $\frac{12}{5} : 3 = \frac{12 : 3}{5} = \frac{4}{5}$

b) **Nombre entier : fraction.**

Multiplier le nombre par l'inverse de la fraction (fraction obtenue en permutant les termes de la fraction donnée).

Ex. $8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$

c) **Fraction : fraction.**

Multiplier la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.

Ex. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

QUE DEVIENT UNE FRACTION QUAND ON AJOUTE UN MÊME NOMBRE A SES DEUX TERMES ?

1er Cas : **Fraction inférieure à 1.**

$$\frac{a}{b} < 1$$

Considérons la différence entre 1 et chacune des fractions :

$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b - a}{b}$$

Ajoutons n aux deux termes de $\frac{a}{b}$ et considérons la différence :

$$1 - \frac{a+n}{b+n} = \frac{b+n}{b+n} - \frac{a+n}{b+n} = \frac{b-a}{b+n}$$

Comparons les deux fractions qui ont le même numérateur :

$$\boxed{\frac{b-a}{b+n} < \frac{b-a}{b}}$$

La différence entre 1 et la fraction ayant diminué, **la fraction $\frac{a}{b}$ a augmenté.**

Exemple. Fraction $\frac{5}{12}$ et n = 3

$\frac{5}{12}$ devient $\frac{5+3}{12+3} = \frac{8}{15} > \frac{5}{12}$

2e Cas : **Fraction supérieure à 1.**

$$\frac{a}{b} > 1$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a - b}{b}$$

$$\frac{a+n}{b+n} - 1 = \frac{a+n}{b+n} - \frac{b+n}{b+n} = \frac{a-b}{b+n}$$

$$\boxed{\frac{a-b}{b+n} < \frac{a-b}{b}}$$

La différence entre la fraction et 1 ayant diminué, **la fraction $\frac{a}{b}$ a diminué.**

Exemple. Fraction $\frac{12}{7}$ et n = 4

$\frac{12}{7}$ devient $\frac{12+4}{7+4} = \frac{16}{11} < \frac{12}{7}$

TRANSFORMATIONS DES FRACTIONS | M_1. 12

1. FRACTION ORDINAIRE EXACTEMENT CONVERTIBLE EN NOMBRE DÉCIMAL

Théorème.

Si une fraction ordinaire irréductible est exactement convertible en nombre décimal, son dénominateur ne contient que les facteurs premiers 2 ou 5.

Réciproque.

Si le dénominateur d'une fraction irréductible ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 ou 5, cette fraction est exactement convertible en nombre décimal.

Ex. $\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{100} = 0{,}35$

Pratiquement, on divise le numérateur 7 par le dénominateur 20. Le quotient à un centième près est égal à 0,35.

2. FRACTION ORDINAIRE NON EXACTEMENT CONVERTIBLE EN NOMBRE DÉCIMAL

Le quotient est illimité et périodique.

Exemple 1. $4/11 = 0{,}36363636...$

La période est 36. Le nombre décimal obtenu est **périodique simple.**

Exemple 2. $5/6 = 0{,}833333...$

Le nombre décimal obtenu est **périodique mixte** : la période est 3 ; le chiffre 8, qui ne se reproduit pas, est dit « irrégulier ».

3. RECHERCHE DE LA FRACTION GÉNÉRATRICE

A) **D'un nombre périodique simple.**

Ex. $0{,}45\ 45\ 45\ \ldots\ = \frac{a}{b}$

0,45 est le quotient, à un centième près, de a par b, et il reste a :

$$100\ a = b \times 45 + a$$
$$99\ a = 45\ b$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{45}{99}} = \frac{5}{11}$$

Conclusion.

Numérateur a : la période 45 ;

Dénominateur b: nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.

B) **D'un nombre périodique mixte.**

Ex. $0{,}725\ 25\ 25\ \ldots\ = \frac{a}{b}$.

0,7 est le quotient, à un dixième près, de a par b et il reste r : $10\ a = b \times 7 + r$

0,725 est le quotient, à un millième près, de a par b, et il reste r : $1\,000\ a = b \times 725 + r$

Par soustraction : $990\ a = (725 - 7)\ b$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{725 - 7}{990}} = \frac{359}{495}$$

Conclusion.

Numérateur a : l'ensemble des chiffres irréguliers et de la période, **moins** l'ensemble des chiffres irréguliers.

Dénominateur b : nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres irréguliers.

4. THÉORÈME

1° Si le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible ne contient, ni le facteur 2, ni le facteur 5, elle est convertible en nombre décimal périodique simple.

2° Si le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible contient au moins l'un des facteurs 2 ou 5, ainsi que d'autres facteurs, elle est convertible en nombre décimal périodique mixte.

5. RÉDUITES D'UNE FRACTION

Exemple $\frac{93}{50} = 1 + \frac{43}{50} = 1 + \frac{1}{\frac{50}{43}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{43}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{43}{7}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}$

1° Négligeons $\frac{1}{7}$. Nous obtenons :

$$\frac{93}{50} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{6}} = 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7}$$

2° Négligeons $\frac{1}{6 + \frac{1}{7}}$. Nous obtenons :

$$\frac{93}{50} \approx 1 + \frac{1}{1} = 2$$

3° Négligeons $\frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}$. Nous obtenons :

$$\frac{93}{50} \approx 1$$

Les réduites d'une fraction sont des fractions voisines de celle-ci, donc pouvant être substituées à la fraction donnée.

Exemple :

Les réduites de la fraction $\frac{93}{50}$ sont : $\frac{13}{7}$ 2 et 1

M_1. 13 — RAPPORTS ET PROPORTIONS

RAPPORT DE DEUX NOMBRES

Le rapport du nombre a au nombre b est le quotient exact de a par b.
(a et b sont des nombres quelconques, entiers, fractionnaires ou décimaux).

Ce rapport s'écrit $\frac{a}{b}$

Exemples. $\frac{7}{5}$ $\frac{0,52}{3}$ $\frac{2,01}{0,09}$

Les rapports ont les **mêmes propriétés** que les fractions.

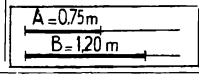
RAPPORT DE DEUX GRANDEURS

Le rapport d'une grandeur à une grandeur de même espèce est le nombre qui mesure la première quand on prend la seconde pour unité.

Théorème.

Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport des nombres qui les mesurent lorsque l'unité choisie est la même.

Exemple (fig. 1). Le rapport de A à B est égal à : 0,75/1,20,



donc à $\frac{75}{120}$ ou $\frac{5}{8}$.

PROPORTION

Une proportion est l'égalité de deux rapports. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Deux extrêmes **a** et **d**, deux moyens **b** et **c**.

Théorème.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne $ad = bc$.

Réciproque. **Si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux est égal au produit des deux autres, ces nombres peuvent former une proportion.**

$mn = pq$ entraîne $\frac{m}{p} = \frac{q}{n}$.

Application.

Par permutation des extrêmes, ou des moyens, on peut écrire une proportion de huit manières différentes :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$
$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Calcul d'un terme d'une proportion. Exemples.

1° Quatrième proportionnelle x à 12, 5 et 15 :

$$\frac{12}{5} = \frac{15}{x}$$
$12x = 5 \times 15$. D'où $x = \frac{75}{12} = 6,25$.

2° Moyenne proportionnelle x à 2 et 32 :

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$$
$x \times x = 2 \times 32$
$x^2 = 64$. D'où $x = \sqrt{64} = 8$.

Transformation des proportions. ***Théorème.***

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on a également : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Application. Calculer deux nombres connaissant leur rapport et, en outre :

1° Leur somme.

Exemple : $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ et $a + b = 45$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{a+b}{4+5} = \frac{45}{9} = 5$$
$a = 4 \times 5 = 20$ et $b = 5 \times 5 = 25$

2° Leur différence.

Exemple : $\frac{a}{b} = \frac{12}{5}$ et $a - b = 35$

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{5} = \frac{a-b}{12-5} = \frac{35}{7} = 5$$
$a = 12 \times 5 = 60$ et $b = 5 \times 5 = 25$

SUITE DE RAPPORTS ÉGAUX. ***Théorème.***

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, on a : $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

Application. Nombres proportionnels à des nombres donnés.

Exemple : a, b, c sont proportionnels à 5, 7 et 3 si l'on a : $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{3}$

Connaissant la somme $a + b + c = S = 105$, on peut calculer ces trois nombres :

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{5+7+3} = \frac{S}{15} = \frac{105}{15} = 7.$$

D'où : $a = 5 \times 7 = 35$ $b = 7 \times 7 = 49$ $c = 3 \times 7 = 21$.

GRANDEURS PROPORTIONNELLES | M_1. 14

GRANDEURS DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES

Les diverses valeurs de l'une sont proportionnelles aux valeurs correspondantes de l'autre.

Valeurs de l'une : **a** et **a'**.
Valeurs corresp. de l'autre : **b** et **b'**.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \text{rapport constant.}$$

Théorème.

Si les valeurs de l'une deviennent 2, 3... fois **plus grandes** (ou plus petites), les valeurs de l'autre deviennent 2, 3... fois **plus grandes** (ou plus petites).

En effet : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ entraîne :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Exemple : si **a'** est 3 fois plus grand que **a**, **b'** est 3 fois plus grand que **b**.

Règle de proportion directe.

Exemple. Dans un même cercle, les longueurs des arcs sont directement proportionnelles aux valeurs des angles au centre qui les interceptent.

Si pour $n = 25°$, on a $L = 48\ cm$
pour $n' = 60°$, on a $L' = ?$

$$\frac{n}{n'} = \frac{L}{L'} \quad \text{ou} \quad \frac{25}{60} = \frac{48}{L'}$$

D'où $L' = \frac{48 \times 60}{25} = \mathbf{115{,}2}\ cm.$

GRANDEURS INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

Les diverses valeurs de l'une sont proportionnelles aux inverses des valeurs correspondantes de l'autre.

Valeurs de l'une : **a** et **a'**.
Valeurs corresp. de l'autre : **b** et **b'**.

$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{a'}{\frac{1}{b'}}$. D'où $ab = a'b' =$ **produit constant.**

Théorème.

Si les valeurs de l'une deviennent 2, 3... fois **plus grandes** (ou plus petites), les valeurs de l'autre deviennent 2, 3... fois **plus petites** (ou plus grandes).

En effet : $ab = a'b'$ entraîne :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}$$

Exemple : si **a'** est 3 fois plus grand que **a**, **b'** est 3 fois plus petit que **b**.

Règle de proportion inverse.

Exemple. Les temps d'exécution d'une tâche déterminée sont inversement proportionnels aux nombres d'ouvriers exécutant cette tâche.

Si pour $n = 5$ ouvriers, on a $t = 12\ h$
pour $n' = 8$ ouvriers, on a $t' = ?$

$$\frac{n}{n'} = \frac{t'}{t} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{8} = \frac{t'}{12}$$

D'où $t' = \frac{12 \times 5}{8} = \mathbf{7{,}5}\ h.$

POURCENTAGES

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, le rapport (constant) d'une valeur de l'une à la valeur correspondante de l'autre peut s'exprimer au moyen d'un rapport de dénominateur 100.

Ex. : $\frac{\text{Bénéfice}}{\text{Prix de vente}} = \frac{126}{420} = \frac{30}{100}$,

ce qui s'écrit 30 %.

ALLIAGES

Exemple : Le duralumin contient, outre l'aluminium: cuivre 4 %, manganèse 0,5 %, magnésium 0,5 %, silicium 0,6 %.

Titre d'un alliage

(contenant un métal précieux).

C'est le rapport, exprimé en nombre décimal, de la masse du métal fin à la masse totale.

Exemple : Si un lingot d'or et de cuivre, d'une masse de 1 200 *g*, contient 900 *g* d'or pur, son titre est :

$$\frac{900}{1200} = \mathbf{0{,}750}$$

Problème 1.

Un alliage de cuivre et d'aluminium pèse 4,200 *kgf* et contient 85 % de son poids de cuivre. Quel poids de cuivre faut-il lui ajouter pour que sa teneur en cuivre soit de 90 % ?

Solution.

Le poids d'aluminium ne varie pas et, dans le premier alliage, il est de :

$$4{,}200 \times 0{,}15 = 0{,}630\ kgf.$$

Or, ce poids représente 10 % du poids de l'alliage, après addition de cuivre.

Poids du nouvel alliage :

$$\frac{0{,}630 \times 100}{10} = 6{,}300\ kgf.$$

Poids de cuivre ajouté :

$$6{,}300 - 4{,}200 = \mathbf{2{,}100}\ kgf.$$

Problème 2.

Dans quel rapport faut-il fondre un alliage d'or (poids **x**) au titre de 0,950 avec un alliage d'or (poids **y**) au titre de 0,800 pour obtenir un alliage au titre de 0,840 ?

Solution.

$$x \times 0{,}950 + y \times 0{,}800 = (x + y) \times 0{,}840$$

d'où $11x = 4y$ et $\frac{x}{y} = \frac{4}{11}$.

M_1. 15 — INTÉRÊT • ESCOMPTE

CALCUL DE L'INTÉRÊT SIMPLE

Par convention, l'intérêt est directement proportionnel au capital et à la durée du placement.

L'intérêt de 100 francs, en 1 an, s'appelle le taux.

Intérêt (i) rapporté par un capital C francs, placé au taux t % pendant j jours.

100 F, en 360 j, rapportent t francs.

En 360 jours, C francs rapportent : $\frac{t \times C}{100}$ francs.

En 1 jour, C francs rapportent : $\frac{t \times C}{100 \times 360}$ francs.

En j jours, C francs rapportent : $\frac{t \times C \times j}{100 \times 360}$ francs.

D'où la formule : $\boxed{i = \frac{C\,t\,j}{36\,000}}$

Applications.

1. Calcul de i $= \frac{C\,t\,j}{36\,000}$

Exemple : C = 27 000 t = 4 j = 100

$$i = \frac{27\,000 \times 4 \times 100}{36\,000}$$

i = 300 F.

2. Calcul de C.

De la formule, on tire $C = \frac{36\,000\,i}{t\,j}$

Exemple : i = 120 t = 3 j = 120

$$C = \frac{36\,000 \times 120}{3 \times 120}$$

C = 12 000 F.

3. Calcul de j.

De la formule, on tire $j = \frac{36\,000\,i}{C\,t}$

Exemple i = 170 t = 3 C = 42 500

$$j = \frac{36\,000 \times 170}{42\,500 \times 3}$$

j = 480 jours.

4. Calcul de t.

De la formule, on tire $t = \frac{36\,000\,i}{C\,j}$

Exemple : i = 820 j = 410 C = 18 000

$$t = \frac{36\,000 \times 820}{18\,000 \times 410}$$

t = 4.

CALCUL DE L'ESCOMPTE

L'escompte d'une traite est l'intérêt de la valeur nominale de la traite pendant le nombre de jours qui reste à courir entre la date de la négociation et l'échéance.

Valeur actuelle A = Valeur nominale N — Escompte e.

$\boxed{A = N - e}$ ⟵ **Formule avec** ⟶ $\boxed{e = \frac{Atj}{36\,000}}$

(En réalité, la somme retenue par la Banque comprend, outre l'escompte, une commission, des droits et des taxes.)

Applications.

1° Quelle est la valeur actuelle d'une traite de 9 000 F payable dans 45 jours ? Taux de l'escompte 6 %.

Solution.

$A = 9\,000 - e$

$$e = \frac{90\,000 \times 6 \times 45}{36\,000}$$

$e = 67{,}60\ F$

$A = 9\,000 - 67{,}60$

$A = 8\,932{,}40\ F.$

2° Quelle était la valeur nominale d'une traite à 90 jours sur laquelle on a touché 1 231,25 F ? Taux de l'escompte 6 %.

Solution.

Escompte d'une traite de valeur nominale N :

$$\frac{N \times 6 \times 90}{36\,000} = \frac{3N}{200}$$

Valeur actuelle $N - \frac{3N}{200} = \frac{197N}{200}$

D'où $\frac{197N}{200} = 1\,231{,}25$

$$N = \frac{1231{,}25 \times 200}{197}$$

$N = 1\,250\ F.$

NOMBRES COMPLEXES

Nombre complexe : nombre formé d'unités qui ne suivent pas la loi décimale.

Mesure des temps (Ma 2) : 7 *h* 42 *mn* 24 *s*
Mesure des angles (Ma. 47) : 18° 14′ 25″.

CONVERSION D'UN NOMBRE COMPLEXE

En unités du plus petit ordre :

Exemple : 7 *h* 42 *mn* 24 *s* en secondes ?

7 *h* = 60 × 7 = 420 *mn*
42 *mn*
462 *mn*

462 *mn* = 60 × 462 = 27 720 *s*
24 *s*
7 *h* 42 *mn* 24 *s* = **27 744 *s***

En unités d'ordres plus élevés :

Exemple : 46 547″ en degrés, minutes et secondes ?

46 547 | 60		46 547″ = 775′ 47″
4 54 | 775 | 60		775′ = 12° 55′
347 | 175 | 12		
47 | 55		

46 547″ = **12° 55′ 47″.**

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Addition.

Exemple :

	26°	12′	57″
	3°		14″
	18°	54′	37″
	47°	66′	107″
ou	47°	67′	47″
ou	**48°**	**7′**	**47″**

Multiplication par un nombre entier.

Exemple :

	17 *h*	2 *mn*	53 *s*
			4
	68 *h*	8 *mn*	212 *s*
ou	**68 *h***	**11 *mn***	**32 *s***

Multiplication, ou division, par un nombre décimal ou fractionnaire.

En général, on a intérêt à **convertir** d'abord le nombre complexe en ses unités du plus petit ordre.

Exemple :

37° 15′ × 2,4 =
2 235′ × 2,4 = 5 364′
= **89° 24′.**

Soustraction.

Exemple :

	14 *h*	7 *mn*	56 *s*
	3 *h*	25 *mn*	13 *s*
	13 *h*	67 *mn*	56 *s*
ou	2 *h*	25 *mn*	13 *s*
	11 *h*	**42 *mn***	**43 *s***

Division par un nombre entier.

Ex. : 28° 38′ 21″ | 3
1° = 60′ | **9° 32′ 47″**
98′
08
2′ = 120″
141″
21
0

Division d'un nombre complexe par un nombre complexe.

En général, on a intérêt à **convertir** les deux nombres en une même unité.

Ex. : 13 *h* 22 *mn* 4 *s* : 4 *h* 25 *s* =
48 124 *s* : 14 425 *s* = **3,34...**

MESURES ANGLAISES

Longueurs.

Unité principale : **le yard** *(yd)* ≈ 0,914 39 *m*
Unités secondaires :
Le **mile** *(ml)* vaut 1760 *yd* ≈ 1 609,34 *m*
Le **pied** *(ft)* vaut $\frac{1}{3}$ *yd* ≈ 0,304 79 *m*
Le **pouce** *(in)* vaut $\frac{1}{12}$ *ft* ≈ 0,025 4 *m*

(pied ou foot, au pluriel feet ; pouce ou inch, au pluriel inches. Abréviation : ″).

Les longueurs plus petites se mesurent en fractions de pouce :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \ldots$$

Exemple : convertir en millimètres un diamètre de 11 $\frac{3}{4}$ ″.

$$11\ \frac{3}{4}'' = \frac{47}{4}''$$

D'où le résultat : $\frac{25{,}4 \times 47}{4} \approx$ **298,4 *mm*.**

Monnaies.

Unité principale : la **livre sterling** (£)
Unités secondaires :

le **shilling** (*s.* ou /—) vaut $\frac{1}{20}$ de livre

le **penny** (*d.* ou *p.*) vaut $\frac{1}{12}$ de shilling

(penny : au pluriel pennies ou pence)

Conversion de monnaies anglaises en monnaies françaises. Exemple :

La livre sterling valant 13,75 *F*, quelle est la valeur en francs de £ 13. 5 *s*. 8 *p* ?

13 £ = 20 × 13 = 260 *s*.
260 + 5 = 265 *s*
265 *s* = 12 × 265 = 3 180 *p*
3180 + 8 = 3 188 *p*.

Dans 1 £, il y a 20 × 12 = 240 *p*.
D'où le résultat :

$$\frac{13{,}75 \times 3\,188}{240} \approx \textbf{182,65 } F.$$

II

ALGÈBRE

Chapitre 1

CALCUL ALGÉBRIQUE

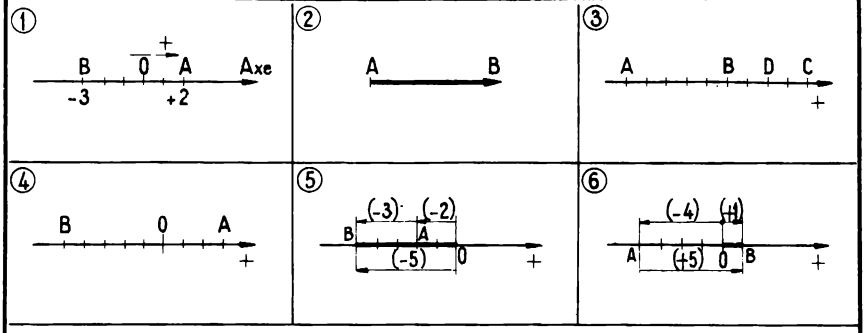
Chapitre 2

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ
FONCTION DU PREMIER DEGRÉ
PROBLÈMES

Chapitre 3

EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ
FONCTION DU SECOND DEGRÉ
PROBLÈMES
FONCTIONS DIVERSES
DÉRIVÉES

M_1. 17 — ADDITION ET SOUSTRACTION
DES NOMBRES ALGÉBRIQUES



NOMBRE ALGÉBRIQUE (OU RELATIF)

Nombre arithmétique précédé d'un signe + ou —

(+) **Nombres positifs :** + 2 | + 0,5 | + 1/3.

(—) **Nombres négatifs :** — 4 | — 3,2 | — 4/5.

Permettent de repérer les points d'une droite orientée (fig. 1), ou **axe ;** les altitudes (au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer).

Valeur absolue = nombre arithmétique.

VECTEUR : segment de droite orienté.

Notation $\overrightarrow{AB}$ (fig. 2) ; sens indiqué par la flèche. A (origine). B (extrémité).

Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe (fig. 3) : Vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La mesure s'écrit $\overline{AB}$ ($\overline{AB}$ est un nombre alg.)	AB = longueur du segment AB. Le signe de $\overline{AB}$ est (+) car $\overrightarrow{AB}$ a le sens de l'axe $\overline{AB} = +5$.

De même $\overline{CD}$ est négatif, car $\overrightarrow{CD}$ a le sens inverse de l'axe. $\overline{CD} = -2$.

Abscisse d'un point A d'un axe par rapport à une origine O (fig. 4).

Mesure alg. de $\overrightarrow{OA}$	l'abscisse de A est + 3 l'abscisse de B est — 5.

OPÉRATIONS

Addition de deux nombres algébriques :

même signe (fig. 5).	**signes contraires** (fig. 6) :
(—2) + (—3) = (—5).	(—4) + (+5) = (+1)
Additionner les valeurs absolues. Au résultat, donner le signe commun.	Retrancher les valeurs absolues. Au résultat, donner le signe du plus grand en valeur absolue.

Somme de plusieurs nombres :

S = (+ 7) + (— 5) + (— 9) + (+ 12)
= (+ 7) + (+ 12) + (— 5) + (— 9)
= (+ 19) + (— 14) = + **5.**

Nombres opposés : somme nulle.
(+ 5) + (— 5) = **0.**

Soustraction. Pour retrancher un nombre algébrique, ajouter son opposé.
(+ 7) — (— 4) = (+ 7) + (+ 4) = + **11.**

Somme algébrique : suite de nombres algébriques séparés par les signes d'addition ou de soustraction.

Ex. : (+ 4) + (— 5) — (+ 10) — (— 7).

Ecriture sous forme d'un polynôme arithmétique (Ma 3), **mais ici généralisé :**

Ex. : S = (+ 4) + (— 5) — (+ 10) — (— 7)
= (+ 4) + (— 5) + (— 10) + (+ 7)
= 4 — 5 — 10 + 7 = 11 — 15 = — **4.**

OPÉRATIONS SUR LES SOMMES ALGÉBRIQUES

Ajouter une somme algébrique :

1er Ex. : 13 + (+ 4 — 5 — 10 + 7)
= 13 + 4 — 5 — 10 + 7 = **9**

On supprime les parenthèses et le signe (+) qui les précède :

2e Ex. : 14 + (— 5 + 10 + 7)
= 14 — 5 + 10 + 7 = **26**

Retrancher une somme algébrique :

Ex. : 13 — (+ 4 — 5 — 10 + 7)
= 13 — 4 + 5 + 10 — 7 = **17.**

On supprime les parenthèses et le signe (—) qui les précède, puis on change le signe des termes écrits dans la parenthèse.

MULTIPLICATION ET DIVISION
DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

M_1. 18

MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES

Règle.

1. **Multiplier leurs valeurs absolues.**
2. **Donner au résultat le signe + si les deux nombres sont de même signe et le signe — dans le cas contraire.**

+ par + donne + — par — donne +	+ par — donne — — par + donne —

Exemples :

$(+4) \times (+5) = +20$ | $(+10) \times (-2) = -20$
$(-9) \times (-3) = +27$ | $(-3) \times (+5) = -15$

Multiplication de plusieurs nombres alg.

$abcd = (ab)cd = (abc)d = (abcd)$.

Exemple :

$$(-4)(+7)(-9)(-3) = (-28)(-9)(-3) = (+252)(-3) = -756.$$

Pratiquement, pour multiplier plusieurs nombres algébriques, on multiplie leurs valeurs absolues et on donne au résultat :
- le signe + si le nombre de facteurs négatifs est pair ;
- le signe — si le nombre de facteurs négatifs est impair.

Propriétés des produits de nombres algébriques.

Ce sont les mêmes que celles des produits de nombres arithmétiques.
A retenir particulièrement :
pour multiplier un produit par un nombre, ne multiplier **qu'un seul des facteurs** par ce nombre.

Exemple : $[(+3)(-4)(-2)] \times (-5) = (+3)(+20)(-2) = -120$

DIVISION DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES

Règle.

1. **Diviser la valeur absolue du premier par celle du second.**

2. **Appliquer la règle des signes donnée par la multiplication.**

Exemples :

$(+16) : (+2) = +8$ | $(+7) : (-3) = -\frac{7}{3}$
$(-24) : (-6) = +4$ | $(-4) : (+5) = -\frac{4}{5}$

Le résultat est, soit un nombre entier algébrique, soit une fraction algébrique.
La division par un nombre nul est impossible.

Propriétés des quotients de nombres algébriques.

1° Toutes les propriétés des fractions arithmétiques s'appliquent aux fractions algébriques (Ma 11 et Ma 12).

Exemples :

$$\frac{+15}{-12} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4} \text{ (simplification)}$$

2° Les règles de division des sommes et des produits par des nombres sont **les mêmes** qu'en arithmétique (Ma. 5).

Exemples :

1° Division d'une somme :

$$\frac{+12 - 18 - 20}{2} = 6 - 9 - 10 = -13$$

(on a divisé **tous** les termes par 2).

2° Division d'un produit :

$$\frac{(+15)(-4)(+12)}{(-5)} = (-3)(-4)(+12) = +144$$

(on n'a divisé par — 5 **qu'un seul** des facteurs)

MISE EN FACTEUR COMMUN

La règle de multiplication d'une somme algébrique par un nombre se traduit par l'égalité :

$$(a - b + c)m = am - bm + cm$$

D'où inversement :

$$am - bm + cm = (a - b + c)m.$$

m, qui était commun aux termes am, bm, cm, a été mis en facteur commun. Il ne figure donc qu'une seule fois dans le second membre de l'égalité (ce qui simplifie certains calculs).

Exemples :
- $9xy - 18y - 27yz = (x - 2 - 3z)9y$
- $7a + 14ab + 21ac = (1 + 2b + 3c)7a$

PUISSANCES

PUISSANCE D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE

Produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre,

$a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$ (n facteurs)

n : exposant (nombre de facteurs).

Signe de a^n.

Deux cas :

$a > o \longrightarrow a^n > o$, quel que soit n

$a < o$ { n pair $\longrightarrow a^n > o$. **Ex.** $(-2)^4 = +16$
n impair $\rightarrow a^n < o$. **Ex.** $(-2)^5 = -32$

En particulier, un **carré est toujours positif.**

Opérations sur les puissances.

1° Pour **multiplier** plusieurs puissances d'un même nombre, on **ajoute** les exposants :

$$(-3)^2 \times (-3)^7 = (-3)^9$$

2° Pour élever une puissance à une **puissance,** on **multiplie** les exposants :

$$[(-4)^3]^2 = (-4)^6$$

3° Pour **élever** un produit de facteurs à **une puissance,** on élève **chaque facteur** à cette puissance :

$$[(-2)\,(7)]^3 = (-2)^3\,(7)^3$$

4° Pour **diviser** une puissance par une puissance du même nombre, on **soustrait** l'exposant du diviseur de celui du dividende :

$$(-5)^7 : (-5)^3 = (-5)^4$$

5° Pour **élever** une fraction à une **puissance,** on élève **chaque terme** à cette puissance :

$$\left(\frac{-2}{+5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{(5)^3}$$

EXPOSANT NÉGATIF

Puisque $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3} \\ \text{et} \\ \dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{1}{a^3} \end{array} \right.$

les expressions a^{-3} et $\dfrac{1}{a^3}$ ont la même signification :

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemples :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001.$$

Ecriture des puissances de 10.

Ex.

$10^1 = 10$ | $10^2 = 100$ | $10^n = 1\,000\ldots$ (n zéros)
$10^{-1} = 0{,}1$ | $10^{-2} = 0{,}01$ | $10^{-n} = 0{,}000\ldots1$

Dans ce dernier cas, le 1 occupe **le nième rang après la virgule.**

Application à la simplification des écritures.

Exemple :

$$4{,}57 \times 0{,}365 \times 0{,}009 = \frac{457}{10^2} \times \frac{365}{10^3} \times \frac{9}{10^3} = \frac{457 \times 365 \times 9}{10^8}$$

ou $\mathbf{457 \times 365 \times 9 \times 10^{-8}}$

(l'exposant — 8 est égal au nombre total des chiffres décimaux supprimés : $2 + 3 + 3 = 8$, changé de signe.)

EXPOSANT ZÉRO

Puisque $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 \\ \text{et} \\ \dfrac{a^3}{a^3} = 1 \end{array} \right.$ $\boxed{a^0 = 1}$

Toute puissance d'exposant zéro est donc égale à 1.

RACINE D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE

x est racine nième de A si $x^n = A$.

n s'appelle l'**indice** de la racine.

1er Exemple : x est la **racine carrée** de A si $x^2 = A$.

Deux cas { $A<0 \rightarrow$ pas de racine carrée
$A>0 \rightarrow$ { Deux racines $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$
Pour $A=9 \rightarrow \sqrt{9}=3$ et $-\sqrt{9}=-3$

2e Exemple : x est la **racine cubique** de A si $x^3 = A$.

Ainsi : $x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Racine d'une puissance.

Exemple :

$$\sqrt[2]{a^6} = a^3 \text{ parce que } (a^3)^2 = a^6$$

Pour **extraire la racine** d'une puissance, on **divise** l'exposant de la puissance par l'indice de la racine.

EXPOSANT FRACTIONNAIRE EXPOSANT DÉCIMAL

D'après la règle précédente :

$$\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}} \; ; \; \sqrt[10]{a^3} = a^{\frac{3}{10}} = a^{0,3}$$

Inversement. $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

$$a^{1,6} = a^{\frac{16}{10}} = a^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{a^8} = a\sqrt[5]{a^3}.$$

EXPRESSION ALGÉBRIQUE

Définition : suite de nombres et de lettres séparés par des signes d'opération.

Expression **rationnelle** : pas de lettre sous radical
Exemple : $5x + x\sqrt{2} - y$.

Sinon, **irrationnelle**
Ex. $\sqrt{2x - 1}$

Expression **entière** : pas de lettre au dénominateur
Exemples : $7x$; $\frac{17x}{3}$

Sinon, **fractionnaire**
Ex. $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3x^2}$

Valeur numérique d'une expression algébrique pour certaines valeurs données aux lettres.

Effectuer les opérations indiquées, en commençant par les ensembles écrits entre parenthèses. Noter qu'une barre de fraction tient lieu de parenthèses.

Exemple :
$$V = \frac{x+1}{2} - (3x + 2) \quad \text{pour} \quad x = 5?$$
$$V = \frac{5+1}{2} - (15 + 2) = 3 - 17 = \mathbf{-14}$$

Expression non calculable pour certaines valeurs données aux lettres (on dit aussi : « non définie »).

Exemples : $\sqrt{x - 12}$ pour $x = 10$?
$V = \sqrt{10 - 12} = \sqrt{-2}$ (non calculable)

$\frac{1}{x - 5}$ pour $x = 5$?
$V = \frac{1}{5 - 5} = \frac{1}{0}$ (non calculable)

MONÔME. Expression algébrique ne comportant que des multiplications : comprend une partie littérale et un coefficient (par convention, on n'écrit pas les signes ×)

Exemple : $-\frac{7}{3}\,a^2bc$ $\left(\text{le coefficient est } -\frac{7}{3}\right)$.

Des monômes sont **semblables** s'ils ont la même partie littérale.
Exemple : $5a^3b$ et $-4a^3b$.

Addition, ou soustraction, des monômes : les écrire les uns à la suite des autres en les séparant par le signe d'addition, ou de soustraction.

Si les monômes sont **semblables,** opérer sur les coefficients et conserver la partie littérale.

Exemples :

$$5x^2y + 7x^2y + \frac{x^2y}{2} = \frac{24x^2y}{2} + \frac{x^2y}{2} = \frac{\mathbf{25x^2y}}{\mathbf{2}}$$

$$2ac^2 - \frac{17}{5}\,ac^2 = \frac{10}{5}\,ac^2 - \frac{17}{5}\,ac^2 = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}\,\mathbf{ac^2}.$$

Multiplication, ou division, des monômes : multiplier, ou diviser, les coefficients, puis opérer, s'il y a lieu, sur les puissances des mêmes lettres (Ma 19).

Exemple 1 :
$$\frac{3}{4}\,a^2b \times \frac{2}{5}\,ab^2 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\,\mathbf{a^3b^3}$$

Exemple 2 :
$$\frac{5}{6}\,xy^3z : \frac{3}{10}\,xy = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{9}}\,\mathbf{y^2z}$$

POLYNÔME. Somme algébrique de monômes.

Exemples : $7x^2 + y^2$ (binôme)
$3x^2 - x - 1$ (trinôme)

On **réduit un polynôme** en effectuant les opérations indiquées sur les termes semblables qu'il peut contenir.

Addition des polynômes :

$$\begin{array}{rl} A = & x^3 - 2x^2 \quad\quad - 1 \\ B = & 4x^3 \quad + 5x + 2 \\ C = & x^3 + 2x^2 - x - 4 \\ \hline A + B + C = & 6x^3 \quad\quad + 4x - 3 \end{array}$$

Remarque. Connaissant les polynômes A, B, et C, on calculerait d'une manière analogue la somme algébrique, $A - B + C$ par exemple.

Soustraction des polynômes :

$$\begin{array}{rl} A = & 7x^2 - x - 3 \\ B = & -x^2 - 3x + 5 \end{array}$$

Pour calculer $A - B$, **ajouter à A, l'opposé de B,** c'est-à-dire le polynôme obtenu en changeant le signe de chaque terme.

$$\begin{array}{rl} -B = & x^2 + 3x - 5 \\ \hline A - B = & 8x^2 + 2x - 8 \end{array}$$

POLYNÔME × MONÔME

Multiplier **chaque terme** du polynôme par le monôme.

Exemple : $(x^3 - x^2 + 4) \times (-4x^2) = -4x^5 + 4x^4 - 16x^2$.

Inversement : mettre un monôme en facteur commun.

Lorsque les termes d'un polynôme contiennent les mêmes facteurs, on peut mettre, en facteur commun, le **monôme** obtenu en multipliant ces facteurs.

Exemples :

1° $8x^5 - 16x^4 + 12x^2 = 4x^2 \times 2x^3 - 4x^2 \times 4x^2 + 4x^2 \times 3 = \mathbf{4x^2(2x^3 - 4x^2 + 3).}$

2° $16x^4 - 8x^2 = \mathbf{8x^2(2x^2 - 1).}$

POLYNÔME × POLYNÔME

Multiplier successivement tous les termes du premier par tous les termes du second polynôme.

Il peut être commode **de poser** l'opération. **Exemple :**

$$\begin{array}{r} 4xy + x^2 \\ \underline{x - y} \\ 4x^2y + x^3 \\ -x^2y \qquad -4xy^2 \\ \hline 3x^2y + x^3 - 4xy^2 \end{array}$$

PRODUITS REMARQUABLES

1° $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$
$(a+b)^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

2° $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$
$(a-b)^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

3° $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$
$(a+b)(a-b) = \mathbf{a^2 - b^2}$

4° $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$(a+b)^3 = \mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

5° $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a-b)^3 = \mathbf{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

6° $(a^2 - ab + b^2)(a+b) = a^3 - a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 + b^3$
$(a^2 - ab + b^2)(a+b) = \mathbf{a^3 + b^3}$

7° $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$
$(a^2 + ab + b^2)(a-b) = \mathbf{a^3 - b^3}$

MONÔME : MONÔME (Ma 20)

Le quotient de deux monômes est, soit un monôme, soit une fraction (dite rationnelle).

Exemples :

$$\frac{12a^2bc^2}{6a^2b} = 2c^2 \quad \text{(monôme)}$$

$$\frac{9x^3y}{3x^2y^2} = \frac{3x}{y} \quad \text{(fraction)}$$

Les fractions algébriques se traitent comme les fractions arithmétiques (Ma 22).

POLYNÔME : MONÔME

Diviser chaque terme du polynôme par le monôme.

Exemple :

$$\frac{15x^3 + 10x^2}{5x^2} = \frac{15x^3}{5x^2} + \frac{10x^2}{5x^2} = \mathbf{3x + 2.}$$

POLYNÔME : POLYNÔME

Exemple 1 (utiliser les produits remarquables) :

1° $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \mathbf{x - 2.}$

2° $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} = \dfrac{(x^2 + 3x + 9)(x-3)}{(x^2 + 3x + 9)} = \mathbf{x - 3.}$

Exemple 2 (poser la division et suivre la même méthode qu'en arithmétique) :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} & \hline -x^2 & x^2 - x + 1 \\ \underline{+x^2 - x} & \\ +x & \\ \underline{-x + 1} & \\ 2 & \end{array}$$

Le quotient est $x^2 - x + 1$ et le reste **2.**

Vérification $(x-1)(x^2 - x + 1) + 2 = (x^3 - x^2 - x^2 + x + x - 1) + 2 = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ (dividende).

FRACTIONS RATIONNELLES

M_1. 22

Définition. Fraction dont les termes sont des monômes ou des polynômes.

Exemples : $\frac{7x}{2x}$ $\quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $\quad \frac{x^2+3x+2}{2x-1}$.

Ces fractions ont les mêmes propriétés que les fractions étudiées en arithmétique. En particulier : **on peut multiplier, ou diviser, les deux termes d'une fraction par la même expression algébrique, à condition que celle-ci ne soit pas nulle.**

Simplification.

Exemples :

$$\frac{8x^2y}{12xy^2} = \frac{2x}{3y}$$

$$\frac{3x^2-9x}{(x-3)^2} = \frac{3x(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{3x}{x-3}$$

Réduction au même dénominateur.

Exemple :

$\frac{x-2}{15x}$ et $\frac{3x-1}{4x}$ deviennent $\frac{4(x-2)}{60x}$ et $\frac{15(3x-1)}{60x}$

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS RATIONNELLES

Addition ou soustraction.

Exemple :

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2-1}$$

Réduire d'abord au même dénominateur.

Additionner les numérateurs et conserver le dénominateur commun:

$$\frac{1}{(x+1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x-1+2(x+1)}{(x+1)(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

Puissance d'une fraction.

Exemple :

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{(3y)^2} = \frac{4x^2}{9y^2}$$

Multiplication et division.

De même qu'en arithmétique (Ma. 11) :

$$\frac{N}{D} \times \frac{N'}{D'} = \frac{NN'}{DD'}$$

et $\frac{N}{D} : \frac{N'}{D'} = \frac{N}{D} \times \frac{D'}{N'} = \frac{ND'}{DN'}$

Exemple :

$$\frac{x}{x^2-4} : \frac{x+2}{x-2} = \frac{x}{x^2-4} \times \frac{x-2}{x+2} =$$

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x-2}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x+2)}$$

$$= \frac{x}{(x+2)^2}$$

RENDRE RATIONNELLE UNE FRACTION DONT LE DÉNOMINATEUR COMPORTE DES RADICAUX

Exemple 1 : $\frac{5}{\sqrt{2}}$?

Multiplier les deux termes par le dénominateur $\sqrt{2}$:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

(Il est **plus rapide** de multiplier $\frac{5}{2}$ par $\sqrt{2} = 1{,}414$ que de diviser 5 par 1,414.)

Plus généralement :

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

Exemple 2 : $\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$?

Multiplier les deux termes par $\sqrt{5}-\sqrt{2}$:

$$\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{9(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{9(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{9(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$= 3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

Plus généralement :

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{N(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b}}$$

Les expressions : $\left.\begin{matrix}\sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\end{matrix}\right\}$ et sont dites **conjuguées.**

M_1. 23 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

ÉGALITÉ ET IDENTITÉ

Une **égalité** s'écrit pour exprimer que deux expressions ont la même valeur.

Ex. : $17 + 4{,}5 = 22 - 0{,}5$.

Une **identité** est une égalité contenant des expressions littérales et qui est vérifiée pour **toutes les valeurs** données aux lettres.

Ex. : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

ÉQUATION

C'est une égalité qui n'est vérifiée que pour **certaines valeurs** données aux lettres.

Ex. : $5x = 15$.

(**x** s'appelle l'inconnue).

Ici, une seule valeur $x = 3$, convient ; c'est la racine de l'équation.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

Elle repose sur les deux théorèmes suivants, qui permettent de transformer une équation en une autre équation qui a même racine que la première (ces deux équations sont dites **équivalentes**).

1° Si l'on ajoute une même expression aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.

Exemple :

$$7x - 5 = x + 9$$
$$7x - 5 + 5 = x + 9 + 5$$
$$7x = x + 9 + 5$$

Pratiquement, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre, à la condition de changer le signe qui le précède.

2° Si l'on multiplie, ou divise, les deux membres d'une équation par une expression non nulle, on obtient une équation équivalente.

Exemple : $9x - 18 = 27 - 3x$ est équivalente à $3x - 6 = 9 - x$.

Application.

Exemple : $5x + 20 = 0$.

Faire passer 20 dans le second membre :

$$5x = -20.$$

Diviser les deux membres par 5 :

$$\frac{5x}{5} = -\frac{20}{5}$$

$$x = -4$$

Pratiquement, si tous les termes sont réduits au même dénominateur, on peut supprimer celui-ci.

Généralisation : $ax + b = 0$.

$$ax = -b.$$

1° Si **a** n'est pas égal à 0 ($a \neq 0$) :

$$x = -\frac{b}{a}$$

2° Si $a = 0$, deux cas à envisager :

$b = 0$	$0 \times x = 0$. N'importe quel nombre est racine (équation **indéterminée**).
$b \neq 0$	$0 \times x = b$. Aucun nombre n'est racine (**équation impossible**).

En règle générale :

1° Transformer l'équation de manière à rassembler tous les termes contenant l'inconnue dans le premier membre et tous les termes connus dans le second.

2° Diviser les deux membres par le coefficient de l'inconnue.

Exemple :

$$4(x - 3) - 2(x + 5) = 27 - 3x$$
$$4x - 12 - 2x - 10 = 27 - 3x$$
$$4x - 2x + 3x = 27 + 12 + 10$$
$$5x = 49$$
$$x = \frac{49}{5} = 9{,}8$$

Exemple :

$$\frac{x}{2} + 10 = x + \frac{x}{3}$$
$$\frac{3x}{6} + \frac{60}{6} = \frac{6x}{6} + \frac{2x}{6}$$
$$3x - 6x - 2x = -60$$
$$+5x = +60$$
$$x = \frac{60}{5} = 12$$

ÉQUATIONS SE RAMENANT AU PREMIER DEGRÉ

1° Forme $(x + a)(x + b) \ldots = 0$.

Exemple : $(2x + 5)(x - 3) = 0$.

Le produit est nul si l'un des facteurs est nul. D'où les deux racines :

$$2x + 5 = 0 \qquad x = -\frac{5}{2}$$
$$x + 3 = 0 \qquad x = -3$$

2° Equations irrationnelles (**x** sous radical).

Exemple :

$$\sqrt{2x - 6} - 4 = 0$$
$$\sqrt{2x - 6} = 4$$

Par élévation au carré : $2x - 6 = 16$

$$2x = 22$$
$$x = 11$$

Inéquation du premier degré, ou se ramenant au premier degré

Exemple 1 :

$$9x - 5 < 5x + 7$$
$$9x - 5x < 7 + 5$$
$$4x < 12$$
$$x < 3$$

Exemple 2 : $(x - 5)(2x + 8) > 0$

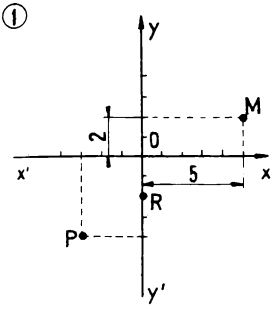
Produit positif si :

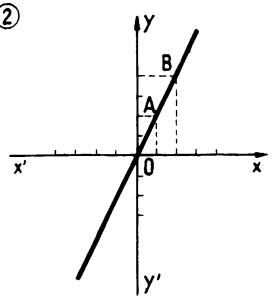
$x - 5 > 0$ et $2x + 8 > 0$; $x > 5$ et $x > -4$

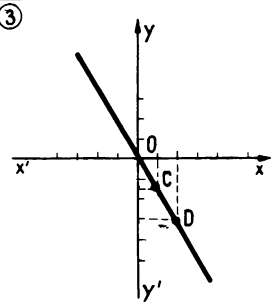
$x - 5 < 0$ et $2x + 8 < 0$; $x < 5$ et $x < -4$

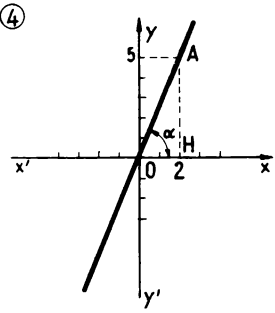
En résumé : $x > 5$ ou $x < -4$.

FONCTION DU PREMIER DEGRÉ (I)

① 

② 

③ 

④ 

FONCTION D'UNE VARIABLE

Une relation quelconque entre deux lettres **x** et **y** permet, en général, de calculer la valeur de **y** correspondant à une valeur de **x**.

Autrement dit : **y** dépend de **x**,
ou encore : **y** est fonction de **x**
(**x** s'appelle la **variable**).

Représentation graphique d'un couple de nombres (fig. 1).

Deux axes perpendiculaires x'Ox et y'Oy étant tracés et une unité de longueur étant choisie, un couple de nombres, 5 et 2 par exemple, se représente ainsi :
porter le premier (5 unités) sur l'axe des **x**,
porter le second (2 unités) sur l'axe des **y**;
et mener les parallèles aux axes. Leur point d'intersection M représente le couple (5, 2).

On dit que les **coordonnées** du point M sont **5 (abscisse)** et **2 (ordonnée)**.

Autres exemples : le point P (— 3, — 4)
le point R (0, — 2).

FONCTION $y = ax$

(**a** désigne un nombre constant)

Exemples : 1° $L = \pi D$
(longueur d'une circonférence, **fonction** du diamètre).

2° $e = vt$
(espace parcouru, **fonction** du temps, dans un mouvement uniforme).

Puisque $\frac{y}{x} = a =$ Constante, les nombres **y** et **x** sont **proportionnels**.

Représentation graphique de la fonction $y = ax$.

1er Cas : $a > 0$ (fig. 2).

Exemple : $y = 2x$.
Le point A : $x = 1$, $y = 2$
et le point B : $x = 2$, $y = 4$
sont alignés avec O, car :

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1}.$$

OAB est la droite représentative de la fonction $y = 2x$.
Cette fonction est **croissante** : lorsque **x** augmente, **y** augmente.

2e Cas : $a < 0$ (fig. 3).

Exemple : $y = -1{,}5x$.
Le point C : $x = 1$, $y = -1{,}5$
et le point D : $x = 2$, $y = -3$
sont alignés avec O, car :

$$\frac{-3}{2} = \frac{-1{,}5}{1}.$$

OCD est la droite représentative de la fonction $y = -1{,}5x$.
Cette fonction est **décroissante** : lorsque **x** augmente, **y** diminue.

D'où le ***théorème :***

La courbe représentative de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine.

Pour **a > 0**, la fonction est **croissante.**
Pour **a < 0**, la fonction est **décroissante.**
Inversement, $y = ax$ est l'**équation** de la droite.

Coefficient angulaire de la droite qui a pour équation $y = ax$. **Exemple :** $y = 2{,}5x$ (fig. 4).

La droite D passe par le point O et par le point A qui a pour coordonnées :

$x = 2$ et $y = 2{,}5 \times 2 = 5$.

Dans le triangle rectangle OHA, on a :

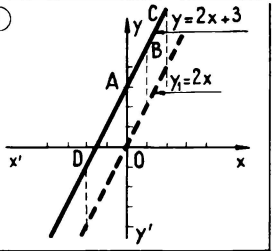
$$\text{tg } \alpha = \frac{HA}{OH} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

D'où $\alpha = 68° 12'$.

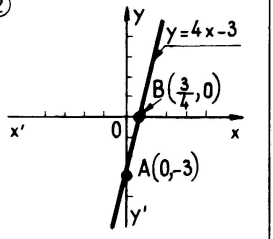
Plus généralement : $\boxed{\text{tg } \alpha = a.}$
(**a** coefficient angulaire de **D**).

M_1. 25 FONCTION DU PREMIER DEGRÉ (2)

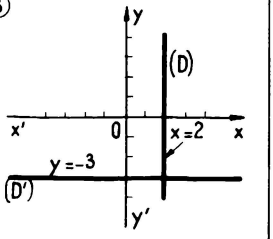
①



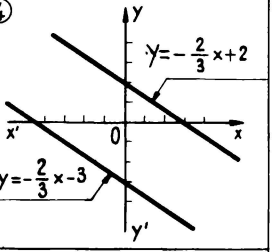
②



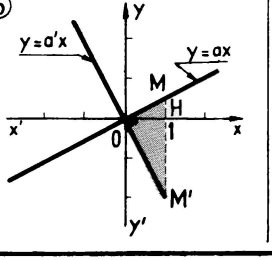
③



④



⑤



ÉQUATION $y = ax + b$.

(a et b désignent des nombres constants).

Exemple : $y = 2x + 3$.

y est la **somme** algébrique de la fonction $y_1 = 2x$ (étudiée Ma 24) et la constante 3.

Lorsque la variable augmente de **h**, la fonction devient :

$$y + k = 2(x + h) + 3 = 2x + 2h + 3.$$

La fonction augmente de $k = 2h$ et $\frac{k}{h} = 2 =$ constante.

Les accroissements k et h sont donc proportionnels.

Représentation graphique de la fonction $y = ax + b$.

Exemple : $y = 2x + 3$.

La droite $y = 2x$ étant tracée (Ma 24), il suffit, pour obtenir la représentation de $y = 2x + 3$, d'augmenter de 3 les ordonnées de tous les points de la droite $y = 2x$. On obtient les points A, B, C, D... **qui sont en ligne droite** (fig. 1).

Le point A, d'abscisse 0, a pour ordonnée 3.

Le nombre 3 s'appelle l'**ordonnée, à l'origine,** de la droite. Le **coefficient angulaire** de la droite est le même que celui de la droite $y = 2x$.

D'où le ***théorème :*** **la courbe représentative de la fonction $y = ax + b$ est la droite passant par le point (0, b) et parallèle à la droite $y = ax$.**

Tracé pratique de la droite qui a pour équation $y = ax + b$

On détermine les points où la droite **coupe** les axes.

Exemple : $y = 4x - 3$ (fig. 2).

Pour $x = 0$	$y = 4 \times 0 - 3 = -3$	(point A)
Pour $y = 0$	$4x - 3 = 0$, d'où $x = \frac{3}{4}$	(point B)

Droites parallèles aux axes.

1° Tous les points de (D), droite parallèle à l'axe y'y, ont même abscisse 2 (fig. 3).

L'équation de D est $x = 2$.

2° Tous les points de (D'), droite parallèle à l'axe x'x, ont même ordonnée — 3 (fig. 3).

L'équation de D' est $y = -3$.

Droites parallèles.

Elles forment avec x'x des angles égaux. Elles ont donc **même coefficient angulaire.**

Exemple : (fig. 4)

Coef. angulaire $-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{2}{3}x - 3 \end{cases}$$

Plus généralement : $\boxed{a = a'}$

Droites perpendiculaires.

Les droites $y = ax$ et $y = a'x$ étant perpendiculaires (fig. 5), on a, dans le triangle rectangle MOM' (Ma. 65) :

$HM \times HM' = OH^2 = 1$ avec $\begin{cases} HM = 1 \times a = a \\ HM' = 1 \times a' = a' \end{cases}$

D'où, en valeur absolue : $a \times a' = 1$.

Mais, puisque M et M' sont situés de part et d'autre de x'x, les nombres algébriques **a** et **a'** sont de signes contraires.

D'où $\boxed{aa' = -1}$

Exemple. $y = \frac{x}{2}$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$

Droite perpendiculaire $\frac{1}{2} \times a' = -1$.

D'où $a' = -2$. Équation $y = -2x$.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

M_1. 26

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

Les inconnues étant désignées par **x** et **y**, un système se présente sous la forme suivante, les lettres **a**, **a'**, **b**, **b'**, **c** et **c'** désignant des nombres connus :

$$ax + by = c \qquad a'x + b'y = c'$$

Pour résoudre un tel système, on emploie en général l'une des deux méthodes ci-dessous.

1° Elimination d'une inconnue par addition.

Exemple $\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3x - 4y = 29 & (2) \end{cases}$

Multiplions par 4 les deux membres de (1) :

$$8x + 4y = 4 \qquad (3)$$

Ajoutons (2) et (3) :

$$11x = 33$$

$$x = \frac{33}{11} = \mathbf{3}.$$

Portons $x = 3$ dans (1) :

$$6 + y = 1$$

$$\mathbf{y = 1 - 6 = -5}.$$

Règle pratique : par le jeu des multiplications, faire apparaître dans les équations deux coefficients opposés.

2° Elimination d'une inconnue par substitution.

Exemple $\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3x - 4y = 29 & (2) \end{cases}$

De (1), tirons $y = 1 - 2x$. (3)

Portons cette valeur de y dans (2) :

$$3x - 4(1 - 2x) = 29$$

$$3x - 4 + 8x = 29$$

$$11x = 33$$

$$x = \mathbf{3}.$$

Portons $x = 3$ dans (3) :

$$y = 1 - 6$$

$$\mathbf{y = -5}.$$

CAS PARTICULIERS

1er Exemple $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$

Les coefficients sont proportionnels :

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

On n'a donc qu'une seule équation pour calculer deux inconnues : le système est dit **indéterminé.**

On peut donner **n'importe quelle valeur** à l'une des inconnues, puis calculer la valeur correspondante de l'autre inconnue.

Exemple : pour $x = 4$, on calcule :

$$3 \times 4 + 2y = 5$$

$$2y = 5 - 12$$

$$\mathbf{y = -\frac{7}{2}}$$

Plus généralement, si :

$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$ **Indétermination : une infinité de solutions.**

2e Exemple $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 6x + 4y = 4 & (2) \end{cases}$

Si l'on appliquait la méthode d'élimination par addition, on écrirait l'équation (3), obtenue en multipliant (1) par — 2 :

$$-6x - 4y = -10 \qquad (3)$$

Additionnons (2) et (3) :

$$0y = -6,$$

Or, aucun nombre **multiplié par 0** ne peut donner un nombre différent de 0.

Donc, il est **impossible** de résoudre le système donné.

Plus généralement, si :

$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}}$ **Impossibilité : aucune solution.**

SYSTÈME DE n ÉQUATIONS A n INCONNUES (n = 3)

Mêmes méthodes que pour n = 2.

Exemple

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 & (1) \\ x + y - z = 7 & (2) \\ 2x + y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

Additionnons (1) et (3) : $5x + 3y = 13$ (4)

Additionnons (2) et (3) : $3x + 2y = 8$ (5) } Système de deux équations à deux inconnues.

Multiplions (4) par 2 : $10x + 6y = 26$

et (5) par — 3 : $-9x - 6y = -24$

et additionnons : $x = 2$

Portons x dans (5) : $6 + 2y = 8$ (Equation à une inconnue.)

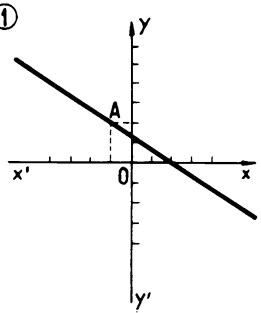
$y = 1$

Portons x et y dans (2) : $2 + 1 - z = 7$ D'où $z = -4$.

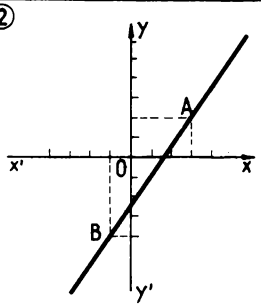
Un conseil! Vérifiez vos résultats en portant, dans les équations, les valeurs obtenues.

ÉQUATION DE LA DROITE

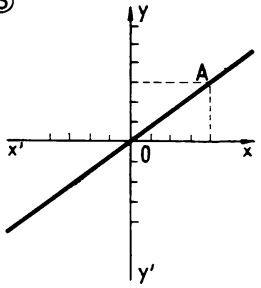
①



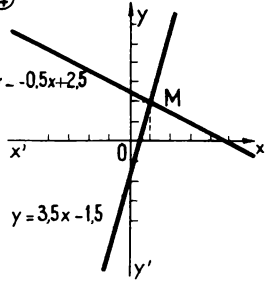
②



③



④



DIFFÉRENTS PROBLÈMES

1. **Ecrire l'équation de la droite de coefficient angulaire donné passant par un point donné.**

Exemple (fig. 1) : coefficient angulaire (— 2/3) ; point A (— 1, 2).

Puisque a = — 2/3, l'équation est de la forme : $y = -\frac{2}{3}x + b$

Puisque la droite passe par A :

$$2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-1\right) + b$$

$$2 = \frac{2}{3} + b \quad \text{ou} \quad b = \frac{4}{3}$$

L'équation de la droite est donc :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

2. **Ecrire l'équation de la droite qui passe par deux points donnés.**

Exemple (fig. 2) : Points A (3, 2) ; B (— 1, — 4).

L'équation est de la forme $y = ax + b$.

Ecrivons que la droite passe :

par A $\{ 2 = 3a + b$; par B $\{ -4 = -a + b$.

Les nombres **a** et **b** s'obtiennent en résolvant le système de deux équations à deux inconnues :

$\{ 3a + b = 2$ / $-a + b = -4$ | Eliminons **b** (par soustraction). Soit 4a = 6 et a = 3/2.

Puis : $b = a - 4$ d'où $b = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$.

L'équation de la droite est donc :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

3. **Ecrire l'équation de la droite qui joint l'origine O à un point donné A** (4, 3) (fig. 3).

Dans ce cas particulier, l'équation de la forme $y = ax$.

Ecrivons que la droite passe par A :

$3 = a \times 4$ ou $a = 3/4$.

L'équation de la droite OA est donc :

$$y = \frac{3}{4}x.$$

4. **Calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites données.**

Exemple (fig. 4) : Droites $y = -0{,}5x + 2{,}5$; $y = 3{,}5x - 1{,}5$.

Lorsque deux droites se coupent, leur point d'intersection (étant situé sur chacune d'elles) a pour coordonnées des nombres qui, substitués à **x** et **y** dans chacune des équations, les transforment en des égalités numériques.

Ce sont donc les racines du système d'équations donné.

Par addition après changement des signes de la première : $0 = 4x - 4$

Puis dans la première équation : $y = -0{,}5 + 2{,}5$

D'où : $x = 1$ | $y = 2$

Le point d'intersection M a donc pour coordonnées 1 et 2.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

M_1. 28

POUR RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT UN PROBLÈME :

1. **Choisir l'inconnue** (ou les inconnues) en précisant l'unité adoptée, par exemple x (mètres), ou t (minutes).....

2. **Mettre en équation,** c'est-à-dire traduire l'énoncé du problème par une égalité dans laquelle entre l'inconnue.

3. **Résoudre l'équation.**

4. **Examiner si les racines** obtenues satisfont aux conditions de l'énoncé. On a, selon les cas, un problème conduisant à la résolution, soit d'une équation, soit d'un système d'équations.

Problème 1 (fig. 1).

Avec une équation du 1er degré.

Dans un trapèze BCED, les bases mesurent 45 et 20 *cm*, la hauteur 16 *cm*. On prolonge jusqu'à leur point d'intersection les côtés non parallèles du trapèze. Calculer la hauteur AH du triangle ADE.

Solution.

Soit x *cm* la hauteur AH. Les triangles ADE et ABC étant semblables (Ma. 64) :

$$\frac{AH}{AK} = \frac{DE}{BC}$$

D'où l'équation $\frac{x}{x+16} = \frac{20}{45}$

D'après les propriétés des proportions :

$45x = 20\,(x + 16)$
$45x = 20x + 320$
$25x = 320$
$x = 12{,}8$ *cm*. (Vérifiez !)

Autre problème.

Partager une longueur de 98 *cm* en trois parties telles que la seconde ait 7 *cm* de moins que la première et 5 *cm* de plus que la troisième.

Solution : $(x + 7) + x + (x - 5) = 98$.
Les longueurs sont **39, 32** et **27** *cm*.
Vérification : $39 + 32 + 27 = 98$.

Problème 2 (fig. 2).

Avec un système d'équations du 1er degré.

Calculer les angles d'un triangle isocèle sachant que chacun des angles à la base et l'angle au sommet sont dans le rapport $\frac{13}{10}$.

Solution.

Soient x° l'un des angles à la base et y° l'angle au sommet du triangle.

D'après l'énoncé : $\frac{x}{y} = \frac{13}{10}$

En outre, la somme des angles d'un triangle est égale à 180 :

$2x + y = 180$

Résolvons le **système** formé par ces deux équations (méthode de substitution) :

$$\begin{cases} 10x = 13y & (1) \\ 2x + y = 180 & (2) \end{cases}$$

$x = \frac{13y}{10}$

$2 \times \frac{13y}{10} + y = 180$

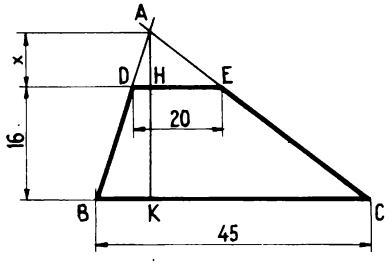
$26y + 10y = 1800$
$36y = 1800$
$y = 50°$

Portons y dans (2) :

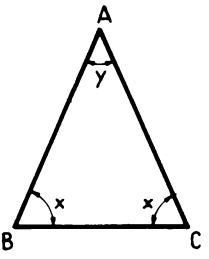
$2x + 50 = 180$
$2x = 130$
$x = 65°$

(Vérifiez !)

①



②



M_1. 29 — ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

LES TROIS FORMES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Exemples :
1re forme : $5x^2 - 20 = 0$
2e forme : $7x^2 + 3x = 0$
3e forme : $5x^2 - 4x - 1 = 0$

Formes générales ($a \neq 0$).
$ax^2 + c = 0$ (équ. incomplète)
$ax^2 + bx = 0$ (équ. incomplète)
$ax^2 + bx + c = 0$ (équ. complète).

FORME $ax^2 + c = 0$

1er Exemple : $5x^2 - 20 = 0$
ou $5x^2 = 20$
$x^2 = \frac{20}{5} = 4.$

Il existe deux nombres qui ont pour carré 4. L'équation a donc pour racines les deux nombres opposés : $x' = +2$ et $x'' = -2$.

2e Exemple : $3x^2 + 8 = 0$
ou $3x^2 = -8$
$x^2 = -\frac{8}{3}.$

Aucun nombre n'a pour carré le nombre négatif $-\frac{8}{3}$ (Ma 19).

L'équation **n'a donc pas de racines.**

FORME $ax^2 + bx = 0$

1er Exemple : $7x^2 + 3x = 0$
ou, en mettant x en facteur commun :
$x(7x + 3) = 0.$
Produit nul si l'un des facteurs est nul :
soit $x = 0$, soit $7x + 3 = 0$.
D'où les deux racines : $x' = 0$ et $x'' = -\frac{3}{7}$

2e Exemple : $\frac{x^2}{2} - x = 0$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x - 2) = 0$
D'où les deux racines : $x' = 0$ et $x'' = 2$.

FORME $ax^2 + bx + c = 0$

L'équation s'écrit successivement :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

1e Trois cas : Si $b^2 - 4ac > 0$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deux racines :

$$\boxed{x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boxed{x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2e Si $b^2 - 4ac = 0$. L'équation s'écrit :
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ ou $x + \frac{b}{2a} = 0$.

On dit que l'on a une **racine double :** $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$

3e Si $b^2 - 4ac < 0$. On ne peut extraire la racine carrée de $b^2 - 4ac$. L'équation **n'a pas de racines** (impossibilité).

Application de la formule.

L'existence des racines d'une équation du second degré est indiquée par le signe de $b^2 - 4ac$. (**discriminant,** que l'on représente par Δ).

1er exemple : $2x^2 - 9x + 3 = 0$.
$a = 2$ $b = -9$ $c = 3$
D'où :
$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 81 - 24 = 57.$
Deux racines :

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4} = \frac{9 \pm 7{,}55}{4}$$

$x' = 4{,}14$ et $x'' = 0{,}36$.

2e Exemple : $x^2 - 5x + 6{,}25 = 0$
$a = 1$ $b = -5$ $c = 6{,}25$
D'où :
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6{,}25 = 25 - 25 = 0.$
Une racine **double** :

$$x = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

3e Exemple : $7x^2 + 2x + 5 = 0$
$a = 7$ $b = 2$ $c = 5$
D'où :
$\Delta = 2^2 - 4 \times 7 \times 5 = 4 - 140 = -136.$
Pas de racines.

SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Somme.

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' + x'' = -\frac{2b}{2a} \qquad \boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

Produit.

$$x' \times x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' \times x'' = \frac{(-b)^2 - \left[\sqrt{b^2 - 4ac}\right]^2}{4a^2}$$

$$x' \times x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \qquad \boxed{x' \times x'' = \frac{c}{a}}$$

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ

M_1. 30

1. ÉQUATION AVEC INCONNUE EN DÉNOMINATEUR

Exemple : $\dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{x+4} = 4.$

Puisque la division par 0 est impossible, il faut que $x \neq 0$ et $x + 4 \neq 0$ (ou $x \neq -4$).

L'équation donnée s'écrit successivement

$$15(x + 4) - 7x = 4x(x + 4)$$
$$15x + 60 - 7x = 4x^2 + 16x$$
$$4x^2 + 8x - 60 = 0$$
$$\mathbf{x^2 + 2x - 15 = 0}$$
$$(\Delta = 4 + 60 = 64)$$

Deux racines :

$$x' = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \mathbf{3}$$
$$x'' = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2} = \mathbf{-5.}$$

Puisque x′ et x″ sont différentes de 0 et — 4, elles conviennent à l'équation donnée.

2. ÉQUATION IRRATIONNELLE

Exemple : $x - \sqrt{25 - x^2} = 1.$

L'équation s'écrit :

$$x - 1 = \sqrt{25 - x^2}$$

Or, le radical étant positif, il en est de même de son égal $x - 1$. Donc les racines doivent être telles que $x - 1 > 0$ ou $x > 1$.

Elevons au carré les deux membres :

$$(x - 1)^2 = 25 - x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$$
$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$\mathbf{x^2 - x - 12 = 0} \quad (\Delta = 1 + 48 = 49)$$

Cette équation a 2 racines :

$x' = \dfrac{1 + \sqrt{49}}{2} = \mathbf{4}$ *(convient)* | $x'' = \dfrac{1 - \sqrt{49}}{2} = \mathbf{-3}$ *(ne convient pas)*

3. ÉQUATION BICARRÉE

Exemple : $x^4 - 15x^2 - 16 = 0.$

Dans une telle équation, l'inconnue figure au carré (x^2) et au carré du carré, ou puissance quatrième : $(x^2)^2 = x^4$, d'où le nom d'équation bicarrée.

Posons : $x^2 = y$ d'où : $x^4 = y^2$

L'équation donnée s'écrit :

$$\mathbf{y^2 - 15\,y - 16 = 0,}$$

équation du second degré

$$(\Delta = 225 + 64 = 289)$$

qui a 2 racines :

$$y' = \frac{15 + \sqrt{289}}{2} = \frac{15 + 17}{2} = 16$$
$$y'' = \frac{15 - \sqrt{289}}{2} = \frac{15 - 17}{2} = -1.$$

Mais, pour que l'on puisse calculer $x = \pm\sqrt{y}$, il faut que y soit positif.

Seule, la racine $y' = 16$ permet de calculer :

$$x' = \sqrt{16} = \mathbf{4}$$
$$x'' = -\sqrt{16} = \mathbf{-4.}$$

Selon le cas, une **équation bicarrée a 0, 2 ou 4 racines.**

SYSTÈMES DE 2 ÉQUATIONS À 2 INCONNUES SE RAMENANT À UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1er Exemple $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases}$

Remarquons que l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour laquelle :

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = -(x' + x'') = -12 \\ \dfrac{c}{a} = x'x'' = 35 \end{cases}$$

a précisément pour racines les nombres cherchés x et y.

Cette équation s'écrit :

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
ou $x^2 - 12x + 35 = 0 \quad (\Delta = 4)$

qui a pour racines :

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2}, \quad \text{donc 7 et 5.}$$

Réponses : $x = 7$ et $y = 5.$

2e Exemple $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ xy = -12 \end{cases}$

Employons la méthode de substitution :

$$y = -\frac{12}{x} \qquad (1)$$
$$5x - \frac{24}{x} = 7$$
$$5x^2 - 24 = 7x$$
$$5x^2 - 7x - 24 = 0 \quad (\Delta = 529)$$

équation qui a pour racines :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{529}}{10} = \frac{7 \pm 23}{10}, \quad \text{donc :}$$

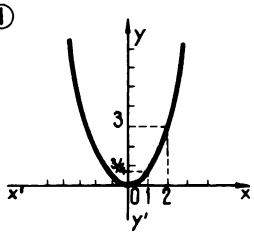
$x' = \mathbf{3}$ et $x'' = -\dfrac{16}{20} = -\dfrac{8}{5} = \mathbf{-1{,}6.}$

A ces deux valeurs de x, correspondent deux valeurs de y, que l'on calcule dans l'équation (1) :

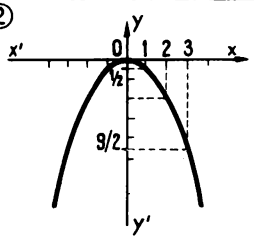
$y' = \mathbf{-4}$ et $y'' = \mathbf{7{,}5.}$

FONCTION DU SECOND DEGRÉ

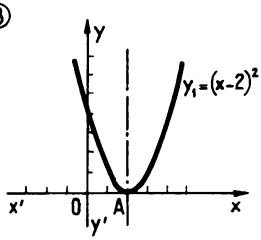
①



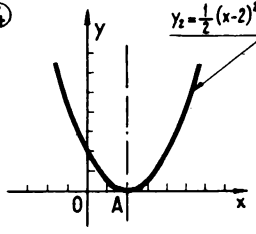
②



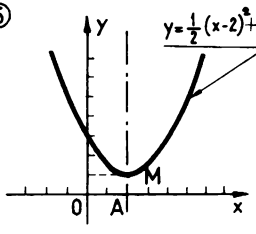
③



④



⑤



FONCTION $y = ax^2$

(a désigne un nombre constant).

Exemples : $S = \pi R^2$ (surface d'un cercle) | $e = \frac{1}{2} gt^2$ (**espace** parcouru par un corps en chute libre)

Puisque $\frac{y}{x^2} = a =$ constante, y est proportionnel au carré de la variable x.

Représentation graphique de la fonction $y = ax^2$.

1er cas : a > 0 (fig 1) | 2e cas : a < 0 (fig. 2).

Ex. $y = \frac{3}{4} x^2$ | **Ex.** $y = -\frac{1}{2} x^2$

Pour deux valeurs opposées de x, la fonction y prend la même valeur. Donc Oy est l'axe de symétrie.

Pour x > 0, y ↘ ; Pour x < 0, y ↗ ; Minimum = 0, pour x = 0

Pour x > 0, y ↗ ; Pour x < 0, y ↘ ; Maximum = 0, pour x = 0

La courbe représentative de la fonction $y = ax^2$ est une parabole ayant pour sommet l'origine O et pour axe Oy.

FONCTION $y = ax^2 + bx + c$

Exemple : $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

Généralisation : $y = ax^2 + bx + c$

Transformons le second membre :

$y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 6)$

$y = \frac{1}{2}\left[(x-2)^2 - 4 + 6\right]$

$y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Représentation graphique :

Fig. 3 : De $y_1 = (x-2)^2$

Pour x = 2 ; y = 0 (Minimum).

Fig. 4. Obtenue en multipliant par ½ les ordonnées de tous les points de y_1 :

$y_2 = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

Fig. 5. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

Obtenue en augmentant de 1 les ordonnées de tous les points de y_2. Pour x = 2, la courbe passe par un minimum égal à 1.

Pour compléter le tracé, chercher les points d'intersection de la courbe et des axes (ici seulement y'y) :

x = 0 ; y = 3

L'équation $\frac{x^2}{2} - 2x + 3 = 0$ n'ayant pas de racines, la courbe ne coupe pas l'axe des x.

De $y_1 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Pour $x = -\frac{b}{2a}$; y = 0 : Minimum égal à 0.

Multiplier par **a** :

$y_2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Si a > 0 Minimum.

Si a < 0 Maximum.

Augmenter de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ les ordonnées de tous les points de y_2.

En résumé, la fonction $y = ax^2 + bx + c$ se représente par une parabole.

Pour $x = -\frac{b}{2a}$, cette courbe passe par un minimum (a > 0) ou un maximum (a < 0), qui est égal à :

$$\frac{4ac - b^2}{4a}.$$

PROBLÈMES DE SECOND DEGRÉ

MÉTHODE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION

Elle ne diffère pas de celle suivie pour la résolution des problèmes du 1er degré (Ma 28).

Problème 1.

Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés soit 1 301.

Solution.

Soit **x** le petit nombre. D'après l'énoncé :

$$x^2 + (x+1)^2 = 1\,301$$
$$\mathbf{2x^2 + 2x - 1\,300 = 0}$$
$$\Delta = 4 + 4 \times 2 \times 1\,300 = 10\,404.$$

D'où $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10\,404}}{4} = \dfrac{-2 \pm 102}{4}$

Puisque **x** doit être positif, seule la racine $x = \dfrac{-2+102}{4} = 25$ convient.

Rép. 25 et **26** *(Vérifiez !)*

Problème 2 (fig. 1).

Le triangle ABC étant rectangle en A, déterminer entre A et B un point M tel que CM soit moyenne proportionnelle entre AB et MB.

Solution.

Soit AM = x. D'après l'énoncé :

$$\frac{AB}{CM} = \frac{CM}{MB}$$

ou $CM^2 = AB \times MB$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$CM^2 = x^2 + 2^2$$

D'où l'équation :

$$x^2 + 2^2 = 5(5 - x)$$
$$\mathbf{x^2 + 5x - 21 = 0}$$
$$\Delta = 25 + 4 \times 21 = 109.$$

D'où $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{109}}{2} = \dfrac{-5 \pm 10{,}44}{2}$

Seule la racine positive convient :

$$x = \frac{-5 + 10{,}44}{2} = \mathbf{2{,}72.}$$

(x est mesuré avec la même unité que AB et AC). *(Vérifiez!)*

Problème 3.

Calculer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre mesure 34 *cm* et la diagonale 13 *cm*.

Solution.

Soit **x** *(cm)* l'une des dimensions ; l'autre est égale à (17 — x) *cm*.

D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$$
$$x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169$$
$$\mathbf{x^2 - 17x + 60 = 0}$$
$$\Delta = 289 - 4 \times 60 = 49.$$

D'où $x = \dfrac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2}$

L'une des dimensions est donc égale, soit à $\dfrac{17+7}{2} = 12$ *cm*, soit à $\dfrac{17-7}{2} = 5$ *cm*.

L'autre à 17 — 12 = 5 *cm*, ou à 17 — 5 = 12 *cm*.

Rép. 12 *cm* et **5** *cm*. *(Vérifiez !)*

Problème 4 (fig. 2).

Quel devrait être le rayon de la base d'un cône dont la génératrice mesure 10 *cm* pour que sa surface totale mesure 500 cm^2?

Solution.

Soit **x** le rayon de la base (en *cm*). La surface de la base mesure πx^2 et la surface latérale mesure $\pi x \times 10$ (en cm^2).

D'après l'énoncé :

$$\pi x^2 + 10\pi x = 500$$

ou $$\mathbf{x^2 + 10x - \frac{500}{\pi} = 0}$$

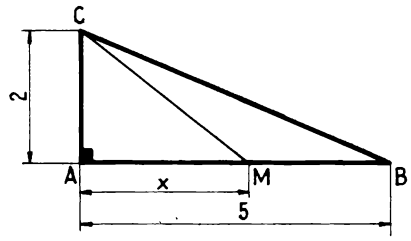
$$\Delta = 100 + \frac{4 \times 500}{\pi} = 100 + 636 = 736$$

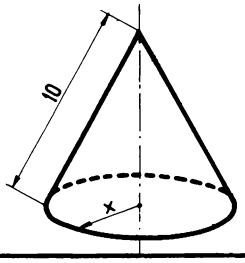
D'où $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{736}}{2} = \dfrac{-10 \pm 27{,}12}{2}$

Seule la racine positive convient :

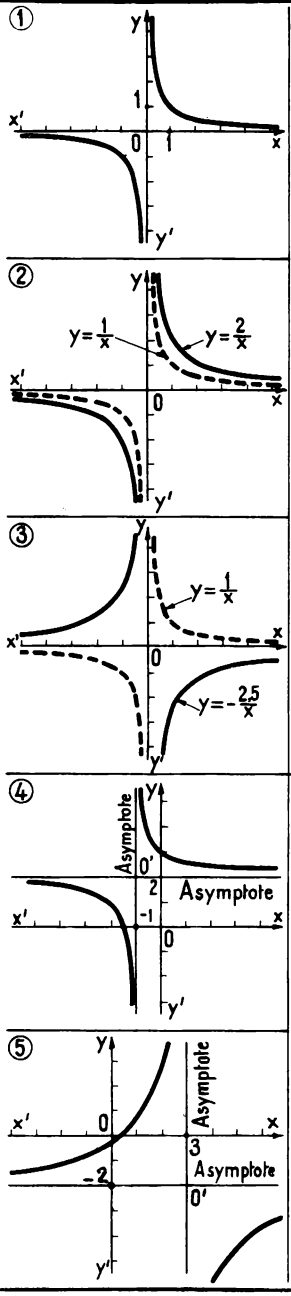
$$x = \frac{-10 + 27{,}12}{2} = \mathbf{8{,}56}\ cm.$$

(Vérifiez !)

① 

② 

M_1. 33 — FONCTIONS $y = \frac{a}{x}$ et $y = \frac{ax + b}{cx + d}$



FONCTION $y = \frac{1}{x}$ (fig. 1)

Le calcul de **y** est possible pour toutes les valeurs de **x**, sauf $x = 0$.

Pour $x = +n$ et $x = -n$, **y** prend les valeurs $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$.

Donc O est le **centre de symétrie.**

Lorsque **x** augmente, **y** diminue : la fonction est **décroissante** pour toutes les valeurs de **x**. D'où la construction par points de la courbe **(hyperbole).**

Centre de symétrie : O.

Axes de symétrie : les bissectrices des angles formés par les axes.

Asymptote y'y (lorsque **x** tend vers 0).

Asymptote x'x (lorsque **x** augmente indéfiniment en valeur absolue).

FONCTION $y = \frac{a}{x}$, ou $y = \frac{1}{x} \times a$.

1er cas $a > 0$ (fig. 2)

Exemple. $y = \frac{2}{x} = \frac{1}{x} \times 2$

La courbe $y = \frac{1}{x}$ étant tracée (en pointillé), on multiplie par 2, les ordonnées de tous les points de la courbe.

Fonction décroissante pour toutes les valeurs de **x.**

Mêmes symétries, mêmes asymptotes que $y = \frac{1}{x}$.

2e cas $a < 0$ (fig. 3).

Exemple. $y = \frac{-2,5}{x} = \frac{1}{x} \times (-2,5)$

La courbe $y = \frac{1}{x}$ étant tracée (en pointillé), on multiplie par — 2,5, les ordonnées de tous les points de la courbe.

Fonction croissante pour toutes les valeurs de **x.**

Mêmes symétries, mêmes asymptotes que $y = \frac{1}{x}$.

FONCTION $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Le second membre, peut s'écrire successivement :

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)}$$

$$y = \frac{a}{c} \times \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}\right)$$

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

L'examen de la dernière forme de **y** montre :

1° que l'on peut calculer **y** pour toutes les valeurs de **x**, sauf $x = -\frac{d}{c}$ (asymptote);

2° que, lorsque $|x|$ augmente indéfiniment, la fonction **y** tend vers $\frac{a}{c}$ (asymptote).

1er Exemple (fig. 4) :

$$y = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

ou $y = 2 + \frac{1}{x + 1}$.

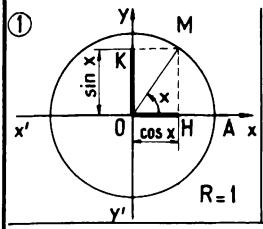
2e Exemple (fig. 5) :

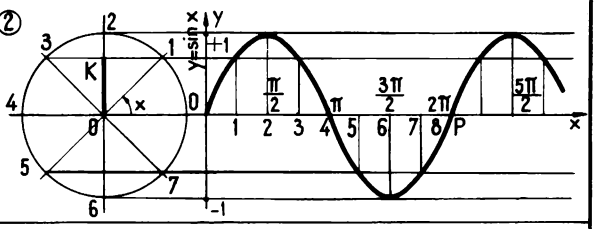
$$y = \frac{-2x + 1}{x - 3}$$

ou $y = -2 + \frac{-5}{x - 3}$.

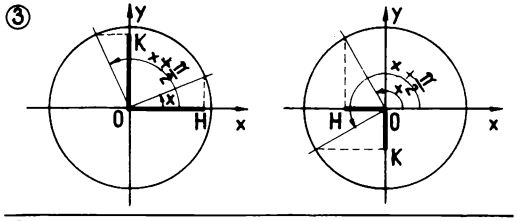
En résumé. La fonction $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ **se représente par une hyperbole qui a pour asymptotes les droites** $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

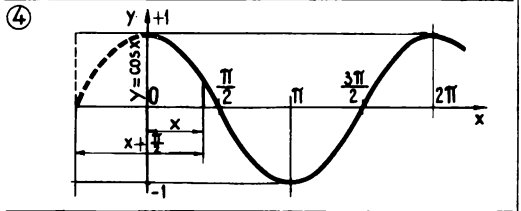
FONCTIONS SINUSOÏDALES

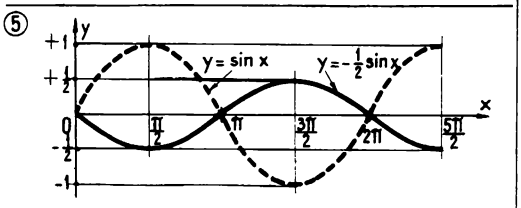


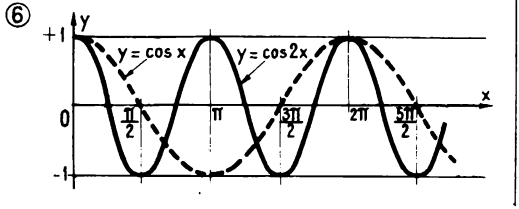


x	0 ↗ $\frac{\pi}{2}$ ↗ π ↗ $\frac{3\pi}{2}$ ↗ 2π ↗ $\frac{5\pi}{2}$ ↗ 3π
sin x	0 ↗ 1 ↘ 0 ↘ −1 ↗ 0 ↗ 1 ↘ 0
cos x	1 ↘ 0 ↘ −1 ↗ 0 ↗ 1 ↘ 0 ↘ −1









REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Le sinus et le cosinus d'un angle variable x sont des fonctions de cet angle (fig. 1 et tableau ci-contre).

$\left.\begin{array}{l}\sin x = \overline{OK} \\ \cos x = \overline{OH}\end{array}\right\}$ Unité : le rayon du cercle.

Représentation de y = sin x (fig. 2).

Diviser en un même nombre de parties égales (ici 8) le cercle trigonométrique et la longueur OP choisie pour représenter un angle de 2π radians.

y est une **fonction périodique de x** (période 2π).

Représentation de y = cos x (fig. 4).

Les fig. 3 indiquent que : $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, car $\overline{OH} = \overline{OK}$.

La courbe $y = \cos x$ est donc **la même** que la courbe $y = \sin x$; elle résulte d'une **translation** de celle-ci la rapprochant de l'axe Oy de $\frac{\pi}{2}$.

Fonctions y = a sin x et y = b cos x.

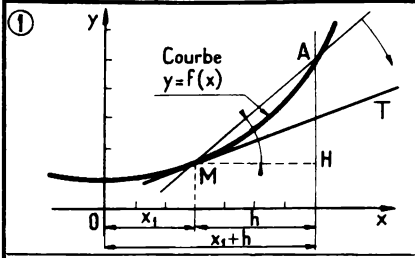
Exemple : $y = -\frac{1}{2}\sin x$ (fig. 5): multiplier par $-\frac{1}{2}$ les ordonnées de tous les points de la courbe $y = \sin x$.

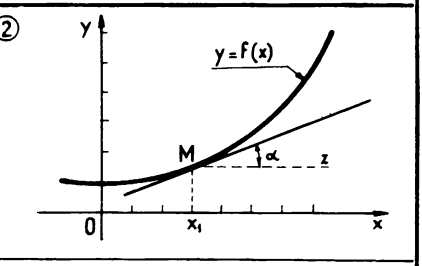
Fonction de **période 2π.**

Fonctions y = sin ax et y = cos bx.

Exemple : $y = \cos 2x$ (fig. 6). L'angle 2x prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π quand x prend toutes les valeurs comprises entre 0 et π. La **période** de cette fonction est donc π.

M_1. 35 — FONCTION DÉRIVÉE





Tangente à la courbe y = f(x) (fig. 1).
Position limite MT au point M de la sécante MA, quand A tend vers M, tout en restant sur la courbe.

Pente de la sécante MA (x_1, abscisse de M)

$$\text{Pente} = \frac{\overline{HA}}{\overline{MH}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Pente de la tangente MT :

limite de $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$, lorsque $h \to 0$.

Dérivée de la fonction y = f(x) pour la valeur x_1 de la variable.

C'est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable quand ce dernier tend vers zéro.

Puisque $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{MH}}$ = tg $\widehat{HMA}$ (fig. 1),

à la limite :

tg α = dérivée de f(x) pour $x = x_1$ (fig. 2).

Fonction dérivée de y = f(x).

A chaque valeur de la variable correspond une valeur de la dérivée.

La dérivée de y = f(x) est donc **une fonction de x** ; on la symbolise par :

y′ ou f′(x).

On écrit alors (fig. 2) : $f'(x_1) = \text{tg } \alpha$.

Recherche de la dérivée d'une fonction y = f(x).

En règle générale :

1° **Donner un accroissement h à la variable x.**

2° **Calculer l'accroissement correspondant k de la fonction.**

3° **Former le rapport** $\dfrac{k}{h}$.

4° **Simplifier ce rapport.**

5° **Faire h = 0 dans le rapport simplifié.**

CALCUL DES DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

1. Fonction y = ax

$y = ax$

$y + k = a(x + h) = ax + ah$

$k = ah$

$\dfrac{k}{h} = a$

D'où $y' = a$

2. Fonction y = ax + b

$y = ax + b$

$y + k = a(x + h) + b$

$k = ah$

$\dfrac{k}{h} = a$

D'où $y' = a$

3. Fonction $y = x^2$

$y = x^2$

$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$k = 2xh + h^2$

$\dfrac{k}{h} = 2x + h$

D'où $y' = 2x$

4. Fonction $y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$

$y + k = a(x + h)^2 + b(x + h) + c$

$k = 2axh + h^2 + bh$

$\dfrac{k}{h} = 2ax + b + h$

D'où $y' = 2ax + b$

5. Fonction $y = \dfrac{a}{x}$

$y = \dfrac{a}{x}$

$y + k = \dfrac{a}{x + h}$

$k = \dfrac{a}{x + h} - \dfrac{a}{x}$

$k = \dfrac{ax - ax - ah}{x(x + h)}$

$k = \dfrac{-ah}{x(x + h)}$

$\dfrac{k}{h} = -\dfrac{a}{x(x + h)}$

D'où $y' = -\dfrac{a}{x^2}$

6. Fonction $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

$y + k = \dfrac{a(x + h) + b}{c(x + h) + d}$

$k = \dfrac{a(x + h) + b}{c(x + h) + d} - \dfrac{ax + b}{cx + d}$

$k = \dfrac{(ad - bc)h}{[c(x + h) + d][cx + d]}$

$\dfrac{k}{h} = \dfrac{ad - bc}{[c(x + h) + d][cx + d]}$

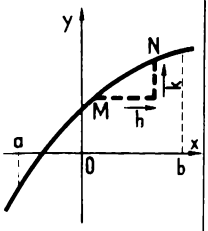
D'où $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Exemple : $y = \dfrac{3x - 5}{2x + 7}$

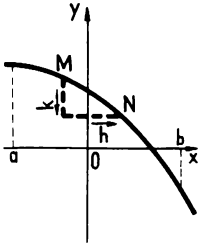
$y' = \dfrac{3 \times 7 - 2(-5)}{(2x + 7)^2} = \dfrac{31}{(2x + 7)^2}$.

MAXIMUM (OU MINIMUM) D'UNE FONCTION

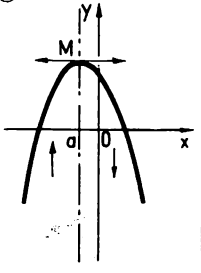
①



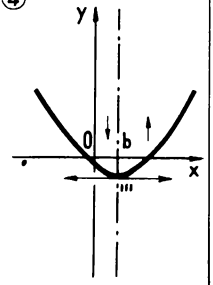
②



③



④



FONCTION CROISSANTE • FONCTION DÉCROISSANTE

Deux points M et N étant pris dans l'intervalle $a < x < b$:

Fig. 1. $\frac{k}{h} > 0$	Fig. 2. $\frac{k}{h} < 0$
limite $\frac{k}{h}$ (*pour* $h \longrightarrow 0$) > 0	limite $\frac{k}{h}$ (*pour* $h \longrightarrow 0$) < 0
$y' > 0$	$y' < 0$

Réciproquement: **si la dérivée d'une fonction est positive, la fonction est croissante;**

si la dérivée d'une fonction est négative, la fonction est décroissante.

Maximum ou minimum d'une fonction.

Fig. 3 **Maximum**

Variable **x**	↗	a	↗
Dérivée **y'**	+	0	−
Fonction **y**	↗	max	↘

Fig. 4 **Minimum**

Variable **x**	↗	b	↗
Dérivée **y'**	−	0	+
Fonction **y**	↘	min	↗

Règle. **Pour chercher la valeur de la variable qui rend une fonction maximum ou minimum, on calcule la valeur de la variable qui annule la dérivée de la fonction, tout en changeant son signe.**

APPLICATIONS

Maximum, ou minimum, de la fonction $y = ax^2 + bx + c$

Exemple 1

$y = 2x^2 - 5x + 1$

Dérivée : $y' = 4x - 5$

$y' = 0$ pour $x = \frac{5}{4}$.

Pour $x < \frac{5}{4}$, on a $y' < 0$

Donc, à $x = \frac{5}{4}$ correspond un **minimum** égal à :

$2 \times \frac{25}{16} - 5 \times \frac{5}{4} + 1$

$= \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{17}{8}$

Exemple 2

$y = -3x^2 + 5x - 4$

Dérivée : $y' = -6x + 5$

$y' = 0$ pour $x = \frac{5}{6}$.

Pour $x < \frac{5}{6}$, on a $y' > 0$.

Donc, à $x = \frac{5}{6}$ correspond un **maximum** égal à :

$-3 \times \frac{25}{36} + 5 \times \frac{5}{6} - 4$

$= -\frac{25}{12} + \frac{50}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{23}{12}$

Maximum du produit p de deux nombres dont la somme. **s est constante.** Nombres **x** et **y.**

En fonction de **x** : $y = s - x$

$p = x(s - x) = xs - x^2$

Dérivée $p' = s - 2x$

Dérivée nulle pour $s - 2x = 0$ ou $x = \frac{s}{2}$. Et $y = \frac{s}{2}$.

Produit maximum quand les deux nombres sont égaux.

Minimum de la somme s de deux nombres dont le produit **p est constant.** Nombres **x** et **y.**

En fonction de x : $y = \frac{p}{x}$

Donc : $s = x + \frac{p}{x}$.

Dérivée $s' = 1 - \frac{p}{x^2}$

Dérivée nulle pour $x^2 = p$, ou $x = \sqrt{p}$. Et $y = \sqrt{p}$.

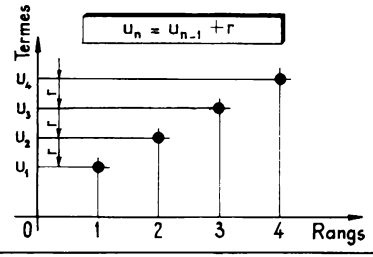
Somme minimum quand les deux nombres sont égaux.

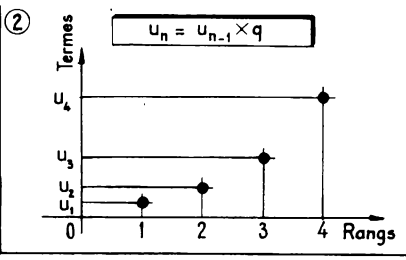
III

CALCUL NUMÉRIQUE

PROGRESSIONS
LOGARITHMES
NOMBRES NORMAUX
RÈGLE A CALCULS
ABAQUES

PROGRESSIONS

① 

② 

PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant.

Le nombre constant, positif ou négatif, est la **raison r :**

Exemple : r = 3
5, 8, 11, 14, 17, 20, 21...
Exemple : r = − 2
14, 12, 10, 8, 6...

$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n-1}, u_n$

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

Fig. 1. **Représentation graphique.** Les points représentant les termes d'une progression arithmétique sont en ligne droite.

Calcul de la raison r.

Exemple : $u_1 = 9$, $u_n = 27$, $n = 7$, $r = ?$

$$r = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{27-9}{7-1} = \frac{18}{6} = 3$$

Progression : 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.
(On a inséré 5 moyens arithmétiques entre 9 et 27).

Somme des n premiers termes.

$$S = u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$
$$S = u_n + u_{n-1} \ldots\ldots + u_2 + u_1$$

$$2S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) \ldots + (u_{n-1} + u_2)(u_n + u_1) = (u_1 + u_n)n$$

$$S = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

Exemple : $S = 5 + 9 + 13 \ldots\ldots$ (95 termes).

$u_{95} = 5 + 94 \times 4 = 381$

$S = \frac{(5 + 381) \times 95}{2}$

$S = 18\,335$

Somme des n premiers nombres entiers.

$S = 1 + 2 + 3 \ldots$ (n termes)

On a $u_1 = 1$, $u_n = n$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme de n premiers nombre impairs.

$S = 1 + 3 + 5 + 7 \ldots\ldots$ (n termes).

On a $u_1 = 1$ et $u_n = 1 + 2 \times (n-1) = 2n - 1$.

$$S = \frac{(2n - 1 + 1)n}{2} = \frac{2n \times n}{2} = n^2$$

Exemple : $S = 1 + 3 + 5 \ldots\ldots$ (11 termes).
$S = 11^2 = 121$.

PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

Suite de nombres tels que chacun est égal au précédent multiplié par un nombre constant (positif).

Le nombre constant est la **raison q.**

Exemple : q = 2
5, 10, 20, 40, 80
Exemple : q = 1/3
36, 12, 4, 4/3

$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n-1}, u_n$

$$u_n = u_{n-1} \times q$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Fig. 2. **Représentation graphique.** Les points représentant les termes d'une progression géom. ne sont pas en ligne droite.

Calcul de la raison q.

Exemple : $u_1 = 10$, $u_n = 810$, $n = 5$.

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} = \sqrt{\frac{810}{10}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[2]{9} = 3$$

Progression : 10, 30, 90, 270, 810. (On a inséré 3 moyens géom. entre 10 et 810).

Somme des n premiers termes.

$$S = u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$
$$Sq = u_1q + u_2q \ldots\ldots + u_{n-1}q + u_nq$$

$$Sq - S = u_nq - u_1$$

car $u_2 = u_1q$; $\ldots\ldots$ $u_n = u_{n-1}q$ $\ldots\ldots$

$$S = \frac{u_nq - u_1}{q-1} \quad \text{ou} \quad S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Exemple : $S = 3 + 6 + 12 + \ldots\ldots$ (7 termes).

$u_7 = 3 \times 2^6$
$u_7 = 192$

$S = \frac{192 \times 2 - 3}{2 - 1}$

$S = 381$

Progression géométrique décroissante illimitée $(0 < q < 1)$.

$$S = \frac{u_1 - u_nq}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_nq}{1-q}$$

Pour $n = \infty$,

$$\text{limite } S = \frac{u_1}{1-q} \quad \text{car} \quad u_n \longrightarrow 0$$

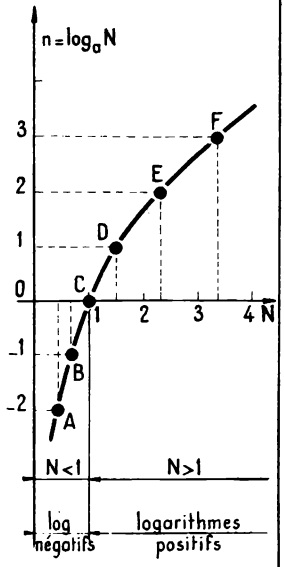
Exemple : $S = 30,\ 10,\ 10/3,\ 10/9 \ldots$

$$\text{limite } S \text{ (pour } n = \infty) = \frac{30}{1 - 1/3} = \frac{30}{2/3} = 45$$

①

N	$n = \log_a N$	Points du graph.
$1{,}5^{-\infty} = 0$	$-\infty$	Point à l'infini
$1{,}5^{-2} = 0{,}44...$	-2	A
$1{,}5^{-1} = 0{,}66...$	-1	B
$1{,}5^{0} = 1$	0	C
$1{,}5^{1} = 1{,}5$	1	D
$1{,}5^{2} = 2{,}25$	2	E
$1{,}5^{3} = 3{,}375$	3	F

②



SYSTÈME DE LOGARITHMES

La correspondance entre les termes de deux progressions :

1. géométrique	a^{-n}....	a^{-2}	a^{-1}	$a^0 = 1$	$a^1 = a$	a^2..	..a^n
2. arithmétique	(−n).	(−2)	(−1)	0	1	2..	..n

permet de définir **le logarithme** d'un nombre dans le système **de base a.**

On a : $\log a^n = n$; $\log a = 1$; $\log 1 = 0$.

En insérant le même nombre de moyens entre deux couples de termes correspondants, chaque moyen arithmétique est le logarithme du moyen géométrique correspondant.

L'égalité $N = a^n$ entraîne l'égalité $\log_a N = n$.

Ainsi, pour la base a = 1,5, on peut calculer les valeurs **n** du logarithme de N (fig. 1), puis représenter la variation de **n** en fonction de N (fig. 2).

Propriétés des logarithmes (base quelconque).

1. Seuls les nombres positifs ont des logarithmes.
2. log 1 = 0 et log a = 1 (quelle que soit la base).
3. Si N > 1, le log est positif ;
   si N < 1, le log est négatif.
4. Si N < N′, on a log N < log N′.

Théorème. **Le logarithme d'un produit de facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs.**

Dans le système de base **a :**

$\log N = n$ entraîne $N = a^n$
$\log N' = n'$ entraîne $N' = a^{n'}$

Or $NN' = a^{n+n'}$
D'où $\log NN' = n + n'$
$\boxed{\log NN' = \log N + \log N'}$

Conséquences.

$\boxed{\log N^m = m \log N}$;

$\boxed{\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m}}$

LOGARITHMES DÉCIMAUX
ou vulgaires
(base 10)

Calculés par BRIGGS (1556-1630), mathématicien anglais.

LOGARITHMES NÉPÉRIENS
ou naturels
(base e = 2,718 28...)

Calculés par NEPER (1550-1617), mathématicien écossais.

Notations.

$N = 10^n$ ou $n = \log N$ (avec l minuscule)

$N = e^{n'}$ ou $n' = \mathrm{Log}\ N$ (avec L majuscule)

Changement de base.

Etablissons la relation qui lie le logarithme décimal (n) et le logarithme népérien (n′) d'un nombre N.

En prenant les log décimaux des deux membres de l'égalité $N = e^{n'}$, il vient :

$\log N = n' \log e$
ou $n = n' \log e$

Or $\log e = \log 2{,}718\ 28 = 0{,}434\ 29$

D'où :

1. Le logarithme décimal d'un nombre est égal à son logarithme népérien multiplié par 0,434 29

$\boxed{n = n' \times 0{,}434\ 29}$

2. Le logarithme népérien d'un nombre est égal à son logarithme décimal multiplié par $\frac{1}{0{,}434\ 29}$, soit 2,302 58

$\boxed{n' = n \times 2{,}302\ 58}$

M_1. 39 — LOGARITHMES DÉCIMAUX

Définition.

Le logarithme décimal d'un nombre positif N est l'exposant n de la puissance de 10 qui est égale à N.

$$10^n = N \quad \text{ou} \quad n = \log N$$

Logarithmes des puissances de 10 (leurs logarithmes sont des nombres entiers).

N ou N	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
log N	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3

Logarithmes de nombres quelconques.

Exemple : $100 < 820 < 1\,000$

$2 < \log 820 < 3$

$\log 820 = 2{,}91\,381.$

Le logarithme de 820 (nombre non puissance de 10) est un nombre décimal.

Un logarithme comprend deux parties :

LA CARACTÉRISTIQUE

(partie entière : positive ou négative).
Elle se calcule mentalement.

1. ***Si le nombre N est plus grand que 1.***

La caractéristique est égale au nombre de chiffres de la partie entière, diminué de 1.

Exemples : $\log 100 = 2$
$\log 1\,345 = 3, \ldots$
$\log 74\,578{,}9 = 4, \ldots$

2. ***Si le nombre N est plus petit que 1.***

La caractéristique est négative ; sa valeur absolue est égale au rang occupé par le premier chiffre significatif, à droite de la virgule.

Exemples : $\log 0{,}01 = \bar{2}$
$\log 0{,}457 = \bar{1}, \ldots$
$\log 0{,}000\,789 = \bar{4}, \ldots$

COLOGARITHME

Le cologarithme de N = le logarithme de 1/N

Or $\log 1 - \log N = 0 - \log N = -\log N$.

Pour calculer le colog. d'un nombre N, il faut donc prendre l'opposé du logarithme.

Pratiquement :

1. **Ajouter 1 à la caractéristique et changer son signe** (+ devient —) et (— devient +).

2. **Retrancher de 9 tous les chiffres de la mantisse, sauf le dernier chiffre significatif à droite que l'on retranche de 10.**

$\log N = 2{,}18\,312$	$\log N = \bar{4}{,}27\,384$
$\text{colog } N = \bar{3}{,}81\,688$	$\text{colog } N = 3{,}72\,616$

Application. Le calcul de $\log \frac{N}{N'}$ (c'est-à-dire $\log N - \log N'$ se ramène à celui de $\log \left(N \times \frac{1}{N'}\right)$.

Donc :

$$\log \frac{N}{N'} = \log \left(N \times \frac{1}{N'}\right) = \log N + \log \frac{1}{N'}$$
$$= \log N + \text{colog } N'.$$

Pour éviter de soustraire le logarithme, additionner le cologarithme.

LA MANTISSE

(toujours positive).

Elle se lit dans une Table.

Exemples :

1. Table des logarithmes des nombres 1 à 999 (Doc 15 et 16).

2. Table des logarithmes des nombres 1 à 9 999, par A. Chevalier et R. Cluzel, Editeur Delagrave à Paris. Ces tables donnent les mantisses avec 5 chiffres.

Remarquons que, si deux nombres sont composés des **mêmes chiffres significatifs** se succédant dans le **même ordre** (les nombres A et $A \times 10^n$ par exemple), leurs **logarithmes ont la même mantisse.**

Par exemple, si :

$\log A = \bar{2}{,}52\,415$
$\log (A \times 10^n) = \log A + \log 10^n$
$\log (A \times 10^n) = \bar{2}{,}52\,415 + n$
(même mantisse).

OPÉRATIONS SUR LES LOGARITHMES

Addition	**Multiplication**
$\bar{2}{,}17\,183$ $5{,}09\,054$ $\bar{3}{,}81\,643$ **1,07 880** (Retenue 1 ; 1 et 5 ... 6 ; 6 moins 5 ... 1)	(par un nombre entier) $\bar{3}{,}67\,814$ 2 $\bar{5}{,}35\,628$ (Retenue 1 ; 1 et $\bar{6}$ ... $\bar{5}$)

Division (par un entier)

1er cas	2e cas
$\frac{\bar{8}{,}36\,048}{2} =$	$\frac{\bar{2}{,}07\,637}{3} =$
$= \bar{4}{,}18\,024$	$\frac{2 + \bar{1} + 1{,}07\,637}{3}$ $= \bar{1}{,}35\,879$

TABLES DE LOGARITHMES

Les tables donnent seulement les **mantisses** des logarithmes, les caractéristiques se calculant comme il a été indiqué ci-contre (Ma. 39).

Chaque table est accompagnée d'une **notice** indiquant sa disposition et son mode d'emploi. Deux problèmes peuvent se poser.

CALCULS (Doc 15 et 16)

1. Logarithme d'un nombre donné.

1° ***Si le nombre a au plus 3 chiffres significatifs,*** la lecture est immédiate :

log 61,1 = 1,786 04
log 0,043 = 2,63 347
log 257 000 = 5,40 993

2° ***Si le nombre a plus de 3 chiffres,*** un calcul supplémentaire est nécessaire.

Exemple : log 4 273 ?

log 4 270 < log 4 273 < log 4 280.

Si l'on admet que, pour une petite variation du nombre, **l'accroissement du logarithme est proportionnel à l'accroissement du nombre :**

Mantisse log 4 270 = 63 043 } **Différence tabulaire** $\Delta = 101$
Mantisse log 4 280 = 63 144 }

Or 4 273 — 4 270 = 3.

Correction tabulaire :

$$\frac{101 \times 3}{10} = 101 \times 0{,}3 = 30{,}3 \backsimeq 30.$$

D'où :

mantisse log 4 273 = 63 043 + 30 = 63 073

log 4 273 = 3,63 073.

Disposition pratique.

427		63043	$\Delta = 101$
3	$101 \times 0{,}3 =$	30	
log 4 273		= **3,63073**	

Ce calcul est une **interpolation par parties proportionnelles.**

2. Nombre ayant un logarithme donné.

2° ***Si la mantisse figure dans la table,*** la lecture est immédiate :

log x = $\overline{2}$,93 349 | x = 0,0858
log x = 5,69 548 | x = 496 000

2°. ***Si la mantisse ne figure pas dans la table,*** une interpolation est nécessaire.

Exemple : log x = 1,858 10.

85 794 < 85 810 < 85 854

$\Delta = 60$ } Pour 85 794 N = 721
Pour 85 854 N = 722

Or : 85 810 — 85 794 = 16.

Correction tabulaire : $\frac{16}{60} = 0{,}26 \ldots \backsimeq 0{,}3.$

Pour 85 810, N = 721 + 0,3 = 721,3.

D'où : **x = 72,13.**

Disposition pratique.

85794		721	$\Delta = 60$
16	$\frac{16}{60} =$	3	
85810		7213	
1,85810		**x = 72,13**	

Remarque : Avec une autre Table, par exemple la Table des logarithmes des nombres de 1 à 10 000 (Chevalier et Cluzel), l'interpolation se fait d'une manière analogue.

Exemples :

log 49 846 ?

4984		69758	$\Delta = 9$
6	$9 \times 0{,}6 =$	5	
log 49846		**4,69763**	

log x = 2,21210 ?

21192		1629	$\Delta = 27$
18	$\frac{18}{27} =$	7	
21210		16297	
2,21210		**x = 162,97**	

TABLE DES LOGARITHMES DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

▼	70..		71..	
00	84 510	14/20	85 126	71/100
01	516		132	49/69
02	522		138	
03	528		144	
04	535		150	
05	541		156	27/38
06	547		163	
07	553		169	
08	559		175	59/83
09	566		181	
10	572	68	187	

Les **Nouvelles tables de logarithmes** Chevalier et Cluzel, permettent la lecture des logarithmes des fractions comprises entre :

$$\frac{10}{100} \text{ et } \frac{99}{100}.$$

Ainsi, sur l'Extrait ci-contre, on lit :

$$\log \frac{27}{38} \backsimeq \log 0{,}7105 \backsimeq \overline{1}{,}85$$

Inversement, si log x = $\overline{1}$,84510, on lit $x = \frac{14}{20}$

En consultant la notice de cette Table, on verra comment se trouvent facilités par son emploi certains calculs techniques.

M_1. 41 — LOGARITHMES DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

UTILISATION DES TABLES

Les calculs trigonométriques peuvent se faire en utilisant les rapports trigonométriques des angles (Doc 29 à 32). Mais, si l'on veut une plus grande précision, il est recommandé d'utiliser les **logarithmes des rapports trigonométriques.**

Exemple : Nouvelles tables de logarithmes Chevalier et Cluzel ; logarithmes des sinus, tangente, cosinus et cotangente des angles, de minute en minute, de 0 à 90°.

Sinus et tangente :
Lire les **degrés** en **haut** de page et les **minutes** dans la colonne de **gauche.**

CONNAISSANT UN ANGLE,
calculer le logarithme de l'un de ses rapports trigonométriques.

1° ***Si l'angle est donné en degrés et minutes,*** la lecture est immédiate.

log sin 37° 11′ = $\overline{1}$,78 130
log cotg 39° 19′ = 0,08 673

2° ***Si l'angle est donné en degrés, minutes et secondes,*** une interpolation est nécessaire.

(Remarquer que lorsqu'un angle **augmente,** le sinus et la tangente **augmentent ;** mais le cosinus et la cotangente **diminuent.**)

Exemple : log sin 50° 25′ 22″ ?

log sin 50°25′	= $\overline{1}$,88688	Δ = 11
22″ $\frac{11 \times 22}{60}$	= 4	
log sin 50°25′22″	= $\overline{1}$,88692	

Cosinus et cotangente :
Lire les **degrés** en **bas** de page et les **minutes** dans la colonne de **droite.**

CONNAISSANT LE LOGARITHME
de l'un des rapports trigonométriques d'un angle,
calculer cet angle.

1° ***Si le logarithme est dans la table,*** la lecture est immédiate.

log cos x = $\overline{1}$,74 455 x = 56° 16′
log tg x = 0,37 532 x = 67° 9′

2° ***Si le logarithme ne figure pas dans la table,*** une interpolation est nécessaire.

Exemple 2 : log cotg x = 0,50 853 ?

Afin d'avoir une valeur **par défaut** de l'angle, on part de la valeur de log cotg la plus proche **par excès** (ici 0,50 882).

50882	17°13′	Δ = 45
29 $\frac{60 \times 29}{45}$	= 39″	
50853	**x = 17°13′39″**	

CALCULS RELATIFS AUX PETITS ANGLES ($\leqslant 4°$)

Les différences tabulaires relatives à ces angles étant importantes, l'interpolation par parties proportionnelles peut conduire à un résultat assez différent du résultat exact. Aussi emploie-t-on la méthode suivante, l'angle **x** étant exprimé en secondes.

Calcul de log sin x.

Posons $s = \frac{\sin x}{x}$

On a : log sin x = log s + log x.

Calcul de log tg x

Posons $t = \frac{\text{tg } x}{x}$

On a : log tg x = log t + log x.

On trouvera sur certaines tables, par exemple les Tables Brachet et Dumarqué (Ed. Delagrave), les valeurs de S = log s et T = log t. D'où :

log sin x = S + log x

Exemple : log sin 12′35″ ?

x = 60 × 12 + 35 = 755
S(lu sur la table) = $\overline{6}$,68557
log 755 = 2,87795
log sin x = $\overline{3}$,56352

log tg x = T + log x

Exemple : log tg 47′22″ ?

x = 60 × 47 + 22 = 2842
T(lu sur la table) = $\overline{6}$,68560
log 2842 = 3,45362
log tg x = $\overline{2}$,13922

Remarque : Pour les grands angles (86° < x < 90°), on remplace cos x par sin (90° — x) et tg x par $\frac{1}{\text{tg } (90° - x)}$.

CALCULS LOGARITHMIQUES

MÉTHODE GÉNÉRALE

1. Transformer l'expression donnée en expression logarithmique (Ma. 38).
2. Ecrire dans deux colonnes, d'une part les calculs auxiliaires, de l'autre les calculs définitifs.
3. S'assurer que l'ordre de grandeur du résultat est plausible.

QUELQUES CALCULS

1. Puissance.

Exemple.

$x = 1{,}05^7$

$\log x = 7 \log 1{,}05$

Calculs auxiliaires

14829 1407 $\Delta = 31$

$4 \quad \frac{4}{31} = 1$

14833 14071

Calculs définitifs

$\log 1{,}05 = 0{,}02119$

$7 \log 1{,}05 = 0{,}14833$

$x = \mathbf{1{,}4071}$

2. Racine.

Exemple.

$x = \sqrt[3]{194{,}57}$

$\log x = \frac{1}{3} \log 194{,}57$

Calculs auxiliaires

1945 28892 $\Delta = 22$

$7 \quad 22 \times 0{,}7 = 15$

19457 28907

76298 5794 $\Delta = 7$

$4 \quad \frac{4}{7} = 6$

76302 57946

Calculs définitifs

$\log 194{,}57 = 2{,}28907$

$\log x = \frac{2{,}28907}{3}$

$\log x = 0{,}76302$

$x = \mathbf{5{,}7946}$

3. Expression numérique.

Exemple.

$x = \frac{12 \sqrt[5]{29{,}2}}{0{,}302^3}$

$\log x = \log 12 + \frac{1}{5} \log 29{,}2 + 3 \operatorname{colog} 0{,}302$

Calculs auxiliaires

$\log 29{,}2 = 1{,}46538$

$\log 0{,}302 = \bar{1}{,}48001$

$\operatorname{colog} 0{,}302 = 0{,}51999$

93222 8555 $\Delta = 5$

$1 \quad \frac{1}{5} \quad 2$

93223 85552

Calculs définitifs

$\log 12 = 1{,}07918$

$\frac{1}{5} \log 29{,}2 = 0{,}29308$

$3 \operatorname{colog} 0{,}302 = 1{,}55997$

$\log x = 2{,}93223$

$x = \mathbf{855{,}52}$

4. Expression comportant des rapports trigonométriques.

Exemple.

$S = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}$

(surface d'un triangle) pour :

$b = 19{,}267, \quad c = 20{,}286$

$\widehat{A} = 25°12'39''$

$S = \frac{19.267 \times 20{,}286 \times \sin 25°12'39''}{2}$

$S = 19{,}267 \times 10{,}143 \times \sin 25°12'39''$

$\log S = \log 19{,}267 + \log 10{,}143 + \log \sin 25°12'39''$

Calculs auxiliaires

1926 28466 $\Delta = 22$

$7 \quad 22 \times 0{,}7 = 15$

19267 28481

1014 00604 $\Delta = 43$

$3 \quad 43 \times 0{,}3 = 13$

10143 00617

$\Delta = 27$

$\log \sin 25°12' = \bar{1}{,}62918$

$39'' \quad 18$

$\log \sin 25°12'39'' = \bar{1}{,}62936$

92033 8324 $\Delta = 5$

$1 \quad 1/5 = 2$

92034 83242

Calculs définitifs

$\log 19{,}267 = 1{,}28481$

$\log 10{,}143 = 1{,}00617$

$\log \sin 25°12'39'' = \bar{1}{,}62936$

$\log S = 1{,}92034$

$S = \mathbf{83{,}242}$

5. Expression entrant dans un calcul technique.

Exemple.

$K = e^{f\alpha}$ $(e = 2{,}71828)$

f (frottement) $= 0{,}085$

α (angle en rd) $= 2{,}04$

$\log K = f\alpha \times \log e$

$\log K = \mathbf{0{,}07\ 531}$

Calculs auxiliaires

0,07518 1189 $\Delta = 37$

$13 \quad \frac{13}{37} = 4$

0,07531 11894

Calculs définitifs

$\log K = 0{,}07531$

$K = \mathbf{1{,}1894}$

M_1. 43 — NOMBRES NORMAUX

L'Association Française de Normalisation (A.F.NOR.) recommande de prendre pour dimensions nominales des organes de machines, les termes de certaines progressions géométriques dites **Séries Renard** (du nom du Colonel Renard qui, le premier, les a utilisées dans le calcul des diamètres des câbles d'aéronefs).

SÉRIE RENARD Ra 10. Progression géométrique de raison **q**, telle que :

$$\boxed{1} \quad q \quad q^2 \quad q^3 \quad q^4 \quad q^5 \quad q^6 \quad q^7 \quad q^8 \quad q^9 \quad \boxed{q^{10}=10}$$

D'où $q = \sqrt[10]{10}$ et $\log q = \frac{1}{10} \log 10 = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

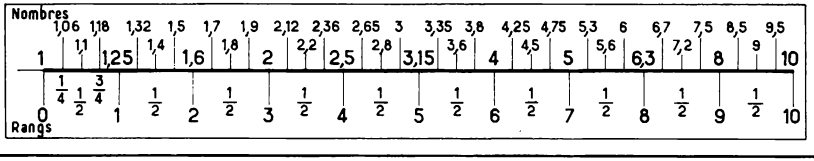
A l'aide d'une table de logarithmes, on calcule $q = 1{,}258\,9$, puis les autres termes. Arrondis, ces termes sont dits **nombres normaux** et forment la **Série Renard Ra 10.**

Valeurs log	Termes calculés	Nombres normaux
$\log q^2 = 0{,}2$	$q^2 = 1{,}584\,9$	1,6
$\log q^3 = 0{,}3$	$q^3 = 1{,}995\,3$	2
$\log q^4 = 0{,}4$	$q^4 = 2{,}511\,9$	2,5
$\log q^5 = 0{,}5$	$q^5 = 3{,}162\,3$	3,15
$\log q^6 = 0{,}6$	$q^6 = 3{,}981\,1$	4
$\log q^7 = 0{,}7$	$q^7 = 5{,}011\,9$	5
$\log q^8 = 0{,}8$	$q^8 = 6{,}309\,6$	6,30
$\log q^9 = 0{,}9$	$q^9 = 7{,}943\,3$	8

Afin d'éviter l'emploi des nombres décimaux, ces nombres sont multipliés par 100 :

100 125 160 200 250 315 400 500 630 800 1 000

On trouvera (Doc 2) le tableau des termes des Séries Ra 5 (termes de Ra 10 pris de deux en deux) et Ra 20 (par insertion d'un moyen géométrique entre les termes de Ra 10). D'ailleurs, la figure ci-dessous, extraite de la **Feuille de norme NF.E 01-001** donne tous les termes des Séries Ra 10, Ra 20 et Ra 40, avec l'indication de leur **rang**, celui-ci étant un nombre entier (Ra 10) ou fractionnaire (Ra 20 et Ra 40).



Calcul rapide d'expressions formées de nombres normaux.

La formule permettant de calculer les nombres normaux est $\mathbf{N} = \mathbf{q}^n$. L'exposant n est le rang (R_g) de N.

n est le log de N dans le système de base q (Voir M_1. 39).

Il en résulte que les propriétés des logarithmes s'appliquent aux rangs des termes de la série Renard. D'où les calculs suivants qui conduisent généralement à des résultats d'une approximation suffisante.

Exemple 1. Calculer la vitesse N (en *tr/mn*) de rotation d'un arbre de tour.

$N = \frac{315V}{D}$ pour $\begin{cases} V = 25\ m/mn \\ D = 190\ mm \end{cases}$

Solution.

$$R_gN = R_g315 + R_gV - R_gD$$
$$= 5 + 4 - 2\frac{3}{4} = 6\frac{1}{4}$$

D'où $N = 42{,}5\ tr/mn.$

Exemple 2. Calculer le diamètre **d** (en *mm*) d'un arbre en acier.

$d = 120\sqrt[4]{\frac{P}{N}}$ pour $\begin{cases} P = 425\ ch. \\ N = 106\ tr/mn. \end{cases}$

Solution.

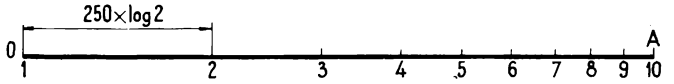
$$R_gd = R_g120 + \frac{1}{4}(R_gP - R_gN)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(6\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} = 2\frac{1}{4}$$

D'où $d = 170\ mm.$

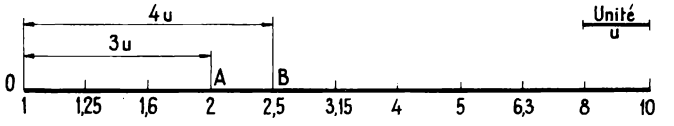
RÈGLE À CALCULS

M_1. 44

①



②



ÉCHELLE LOGARITHMIQUE (fig. 1)

Axe portant des points dont les distances à l'origine O sont proportionnelles aux logarithmes des nombres marqués en ces points.

Exemple : OA = 250 *mm* (module de l'échelle) représentant log 10 (fig. 1).

$0-1 = 250 \times \log 1 = 250 \times 0 = 0$ *mm*
$0-2 = 250 \times \log 2 = 250 \times 0{,}301\,03 = 75{,}2$ *mm*
$0-3 = 250 \times \log 3 = 250 \times 0{,}477\,12 = 119{,}3$ *mm*
$0-4 = 250 \times \log 4 = 250 \times 0{,}602\,06 = 150{,}5$ *mm*
$0-5 = 250 \times \log 5 = 250 \times 0{,}698\,97 = 174{,}7$ *mm*
$0-6 = 250 \times \log 6 = 250 \times 0{,}778\,15 = 195{,}5$ *mm*
$0-7 = 250 \times \log 7 = 250 \times 0{,}845\,10 = 211{,}3$ *mm*
$0-8 = 250 \times \log 8 = 250 \times 0{,}903\,09 = 225{,}8$ *mm*
$0-9 = 250 \times \log 9 = 250 \times 0{,}954\,24 = 238{,}5$ *mm*

Une échelle log. facile à construire (fig. 2).

Porter des divisions égales et graduer en nombres normaux (M_1. 43).

En effet log 2 ≈ 0,3 et log 2,5 ≈ 0,4 (M_1. 43).

Donc $\frac{OA}{\log 2} = \frac{OB}{\log 2{,}5}$

ce qui prouve que cette échelle est logarithmique.

ÉTUDE DE LA RÈGLE À CALCULS (fig. 3)

Comporte des échelles logarithmiques de différents modules; les échelles portées par la réglette peuvent se déplacer par rapport aux échelles portées par la règle.

Échelles de la règle et de la réglette :

Au recto (échelles logarithmiques) (fig. 3)

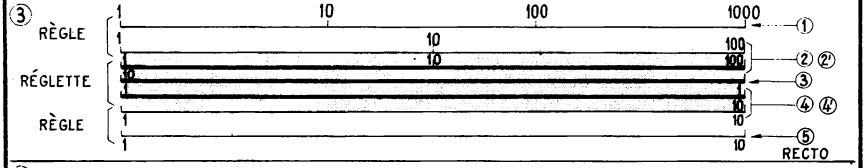
(1) Règle : échelle des **cubes** (module I/3)
(2) Règle : échelle des **carrés** (module I/2)
(2′) Réglette : échelle des **carrés** (module I/2)
(3) Réglette : échelle des **inverses** (module I)
(4) Réglette : échelle des **nombres** (module I)
(4′) Règle : échelle des **nombres** (module I)
(5) Règle : échelle des **logarithmes.** (échelle à divisions égales).

Au verso de la réglette (fig. 4)

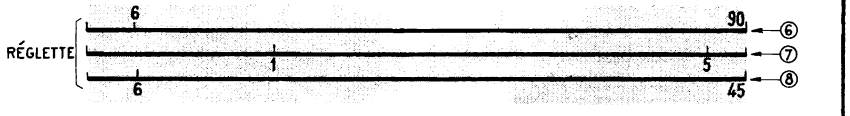
(6) Echelle des **sinus** (S) des angles de 5°45′ à 90°
(7) Echelle des **sinus et tangentes** (S et T) des angles de 34′20″ à 5°45′
(8) Echelle des **tangentes** (T) des angles de 5°45′ à 45°.

Remarque. Au verso de la règle figurent des renseignements usuels et des tableaux de nombres dits « diviseurs ». Utiliser la notice du constructeur.

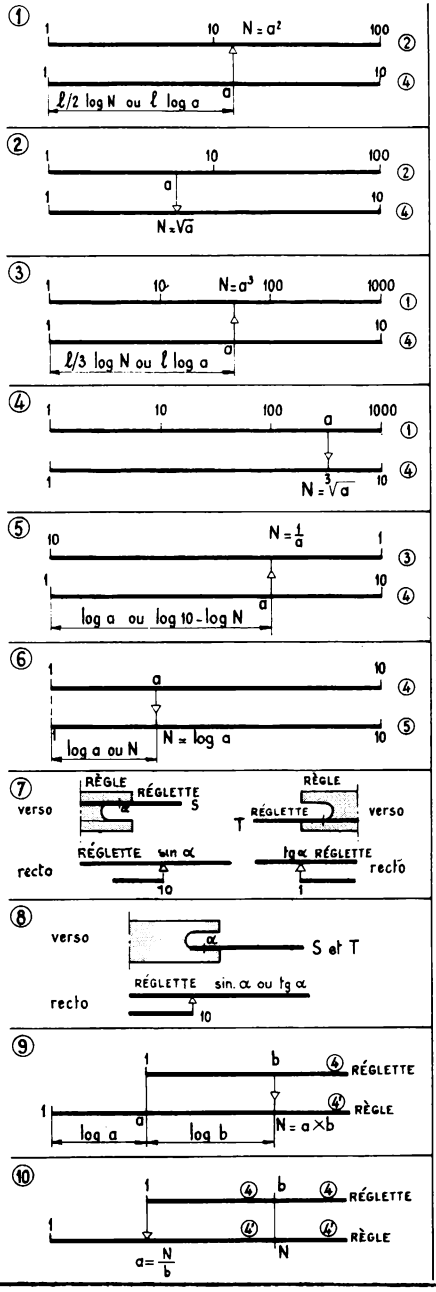
③



④



EMPLOI DE LA RÈGLE



CARRÉ ET RACINE CARRÉE

(éch. 2 et 4).

Carré d'un nombre a (fig. 1).

L'égalité $\frac{1}{2} \log N = \log a$

ou $\log N = \log a^2$

montre que $\boxed{N = a^2}$

Exemple : a = 3,7 $a^2 = 13,7$.

Racine carrée d'un nombre a (fig. 2).

Inversement $\boxed{N = \sqrt{a}}$

Exemple : a = 7,5 $\sqrt{a} = 2,74$.

CUBE ET RACINE CUBIQUE

(éch. 1 et 4).

Cube d'un nombre a (fig. 3).

L'égalité $\frac{1}{3} \log N = \log a$

ou $\log N = \log a^3$

montre que $\boxed{N = a^3}$

Exemple : a = 4,7 $a^3 = 104$.

Racine cubique d'un nombre a (fig. 4).

Inversement $\boxed{N = \sqrt[3]{a}}$

Exemple : a = 550 $\sqrt[3]{a} = 8,2$.

INVERSE (éch. 3 et 4)

L'égalité $\log 10 - \log N = \log a$ (fig. 5).

ou $\log N = \log 10 - \log a$

$\log N = \log \frac{10}{a}$

montre que (à la virgule près) : $\boxed{N = \frac{1}{a}}$

Exemple : a = 5,2 $\frac{1}{a} = 0,192$.

LOGARITHME (éch. 4 et 5).

Permet de connaître la mantisse de log a par lecture directe sur l'éch. 5.

$\boxed{\log a = N}$ (fig. 6).

Exemple : log 36 = 1,556.

SINUS ET TANGENTE

Sinus de $\alpha > 5°45'$ (fig. 7, à gauche).

Exemple : sin 35° = 0,574

Tangente de α **(**$5°45' < \alpha < 45°$**)** (fig. 7, à droite).

Exemple : tg 22° = 0,404.

Sinus et tangente de $\alpha < 5°45'$ (fig. 8). **Exemple** : tg 3° 30′ = 0,061.

MULTIPLICATION ET DIVISION

(éch. 4 et 4′).

$\log N = \log a + \log b$

$\log N = \log ab$

$\boxed{N = ab}$ (fig. 9).

Exemple : a = 1,54 ; b = 4,1 ; ab = 6,31

Inversement : $\boxed{a = \frac{N}{b}}$ (fig. 10)

Ex. : N = 7,1 ; b = 2,24 ; $\frac{N}{b} = 3,17$.

Tableaux de courbes (en général des droites) donnant graphiquement la valeur d'une grandeur liée à d'autres grandeurs, pour des valeurs données de celles-ci.

ABAQUES CARTÉSIENS

DESCARTES (1596-1650), créateur de la Géométrie analytique.

Exemple : Abaque de fraiseuse.

1° $V = \dfrac{\pi DN}{1000}$ **D** = diamètre de fraise *(mm)*, **V** = vitesse de coupe *(m/mn)*, **N** = vitesse de rotation *(tr/mn)*

Fig. 1. A chaque valeur de N correspond une fonction du 1er degré de la variable D, d'où le tracé d'une droite (M_1. 24).

Lecture. D = 80 *mm* et V = 25 *m/mn*

Suivre les deux lignes pointillées qui se rencontrent en A. D'où :

N ≈ 98 *tr/mn*.

2° **Autre représentation.**

$V = \dfrac{\pi DN}{1000}$ peut s'écrire $N = V \times \dfrac{1000}{\pi D}$

ou $\log N = \log V + \log\left(\dfrac{1000}{\pi D}\right)$

(Voir M_1. 38)

Avec les échelles logarithmiques (M_1. 44), cette relation s'écrit :

$y = x + K$

(K correspondant à une valeur particulière de D) Elle se représente par une droite (Ma 24).

A l'ensemble des valeurs de D correspond l'abaque (fig. 2).

Lecture. V = 20 *m/mn* et D = 10 *mm*.

Suivre la ligne pointillée (20) qui rencontre l'oblique (10) en A.

Lire sur l'horizontale de A :

N = 640 *tr/mn*.

ABAQUES À POINTS ALIGNÉS

Lecture très facile : la valeur cherchée se lit sur la droite passant par les deux valeurs connues.

Exemple 1 : Calcul du diamètre d'un arbre de transmission.

$D = 120 \sqrt[4]{\dfrac{P}{N}}$ **P** en *ch*, **N** en *tr/mn*, **D** en *mm*

Lecture (fig. 3) : P = 5 *ch*, N = 500 *tr/mn*.

La droite joignant ces points coupe l'échelle des D au point A marqué 38. D'où :

D = **38** *mm*.

Exemple 2 : Calcul d'une résistance électrique équivalente (montage en parallèle).

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$ (R en ohms)

En remarquant que DA = OD = OA = R,

la relation $\dfrac{DA}{OC} = \dfrac{DB}{OB}$ s'écrit :

$\dfrac{R}{r_2} = \dfrac{r_1 - R}{r_1}$ ou $\dfrac{R}{r_2} = 1 - \dfrac{R}{r_1}$

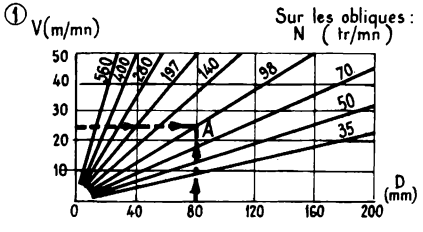
ou $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$

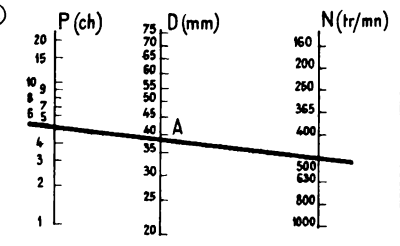
Lecture (fig. 4).

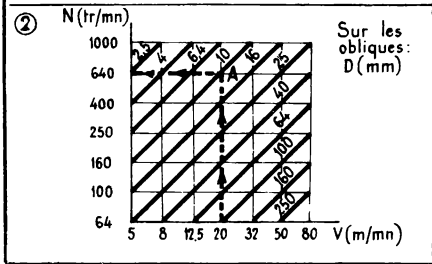
$r_1 = 2{,}5\ \Omega$ et $r_2 = 3\ \Omega$

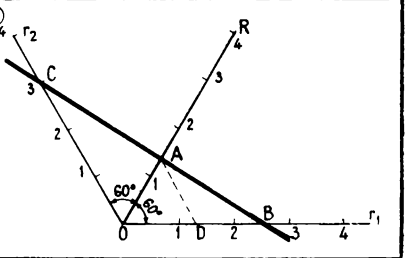
Au point A, on lit :

R ≈ 1,4 Ω.









IV

GÉOMÉTRIE PLANE ET TRIGONOMÉTRIE

Chapitre 1

DROITES - ANGLES
TRIANGLES - QUADRILATÈRES
CERCLE
POLYGONES RÉGULIERS
RACCORDEMENTS

Chapitre 2

SIMILITUDE
THÉORÈME DE PYTHAGORE
AIRES DES FIGURES PLANES

Chapitre 3

(Trigonométrie)

TRIANGLES RECTANGLES
TRIANGLES QUELCONQUES
TRANSFORMATIONS DES EXPRESSIONS

Chapitre 4

ELLIPSE - HYPERBOLE - PARABOLE
DÉVELOPPANTE DE CERCLE - CYCLOÏDE
SPIRALES

M_1. 47 SEGMENTS DE DROITE • ANGLES

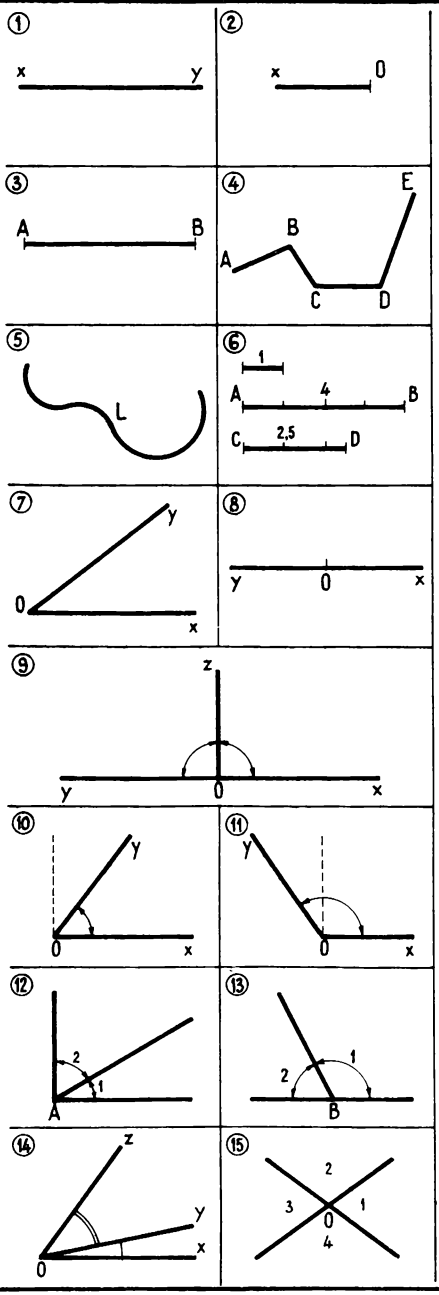


Fig. 1. **DROITE xy.**

Image d'un fil tendu.

Fig. 2. **Demi-droite** Ox. Partie d'une droite illimitée dans un seul sens à partir de O.

Fig. 3. **Segment de droite** AB. Partie d'une droite comprise entre deux de ses points.

Deux segments égaux peuvent coïncider.

Fig. 4. **Ligne brisée :** formée de segments de droite placés bout à bout.

Fig. 5. **Ligne courbe :** ni droite, ni brisée.

Fig. 6. **Mesure d'un segment.** Nombre d'unités (ou de parties égales de l'unité) qu'il contient : mesure AB = 4.

Propriété de la ligne droite :

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

Fig. 7. **ANGLE $\widehat{xOy}$.**

Figure formée par deux demi-droites issues d'un même point.

Angle $\widehat{xOy}$: sommet O, côtés Ox, Oy. Deux angles égaux peuvent coïncider.

Bissectrice d'un angle. Demi-droite issue du sommet et le partageant en deux angles égaux.

Fig. 8. **Angle plat :** côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

Fig. 9. **Angle droit :** moitié d'un angle plat.

$\widehat{xOz} = \widehat{zOy} =$ 1 angle droit **(*D*)**

Sous-multiples : ***degré*** **(°)**, ***minute*** **(′)**, ***seconde*** **(″)** ;
grade **(gr)**, ***décigrade*** **(dgr)**, ***centigrade*** **(cgr)**.

Fig. 10. **Angle aigu :** $\widehat{xOy} < 1$ **D.**

Fig. 11. **Angle obtus :** $\widehat{xOy} > 1$ **D.**

Fig. 12. **Angles complémentaires :** $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 1$ **D.**

Fig. 13. **Angles supplémentaires :** $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 2$ **D.**

Fig. 14. **Angles adjacents** : même sommet O, côté commun Oy, situés de part et d'autre du côté commun.

Fig. 15. **Angles opposés par le sommet** : côtés de l'un dans le prolongement des côtés de l'autre.

Théorème.

Si deux angles sont opposés par le sommet, ils sont égaux.

$\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$ et $\widehat{O_2} = \widehat{O_4}$

Un théorème est une propriété que l'on démontre en partant d'une hypothèse. On aboutit par un raisonnement à une conclusion.

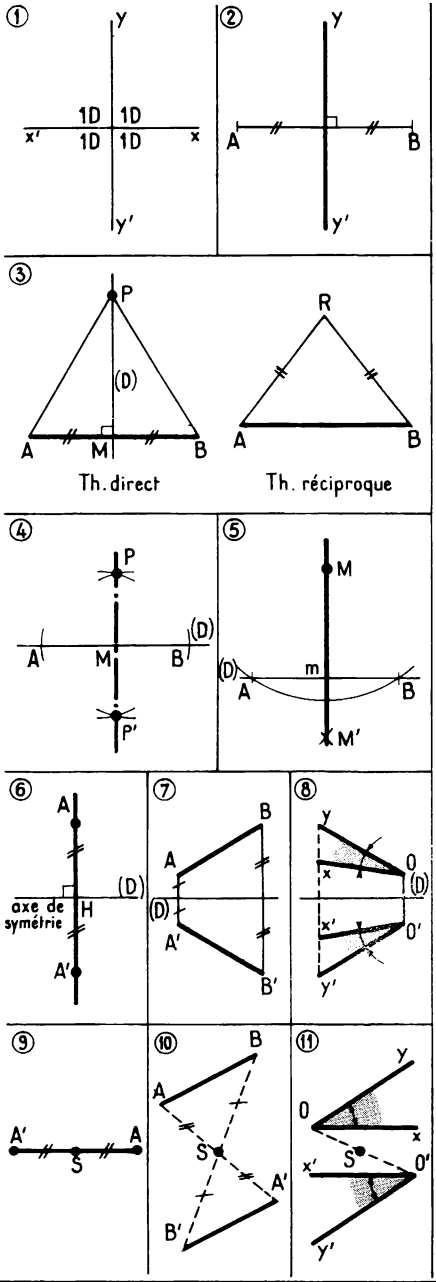


Fig.1. **DROITES PERPENDICULAIRES**

Deux droites sont perpendiculaires quand l'un des angles qu'elles forment est droit (on démontre que les 3 autres sont droits) :

droites perpendiculaires x'x et y'y ($x'x \perp y'y$).

Fig. 2. **Médiatrice d'un segment.**

Perpendiculaire à ce segment en son milieu : y'y médiatrice de AB.

Théorème.

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est équidistant des extrémités de ce segment.

Fig. 3 : Si P est sur la médiatrice (D), on a PA = PB.

Ce théorème, qui est appelé théorème direct, a pour théorème réciproque :

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice de ce segment.

Fig. 3. Si RA = RB, le point R est sur la médiatrice de AB.

Le th. direct et le th. réciproque échangent leurs hypothèses et leurs conclusions.

Perpendiculaire menée d'un point à une droite (tracé).

Fig. 4. **Le point M est sur la droite (D).**

Porter MA=MB et déterminer 2 points P et P' de la médiatrice de AB (c'est aussi la construction de la **médiatrice** de AB).

Fig. 5. **Le point M n'est pas sur la droite (D).**

Déterminer A et B (sur la droite) et M' tels que : MA = MB et M'A = M'B.

m pied de la perpendiculaire ou **projection de M sur (D).**

SYMÉTRIE

Symétrie par rapport à une droite.

Droite (D) : **axe de symétrie.**

Fig. 6. Points A et A'
Fig. 7. Segments AB et A'B'
Fig. 8. Angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$
} Symétriques par rapport à la droite(D)

Deux figures symétriques par rapport à une droite sont égales.

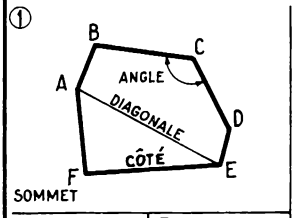
Symétrie par rapport à un point.

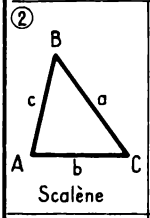
Point S : **centre de symétrie.**

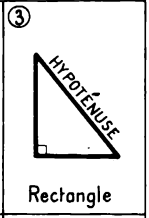
Fig. 9. Points A et A'
Fig. 10. Segments AB et A'B'
Fig. 11. Angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$
} Symétriques par rapport au centre S

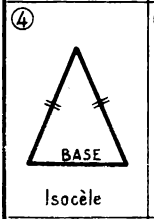
Deux figures symétriques par rapport à un point sont égales.

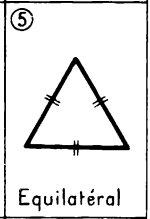
TRIANGLE (I)

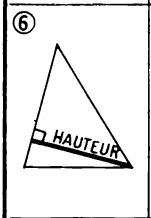


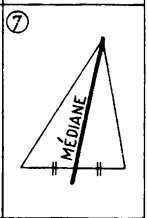


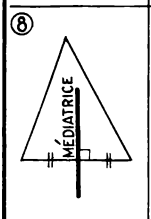


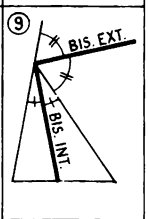


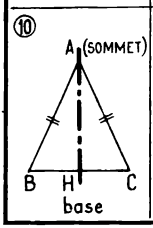


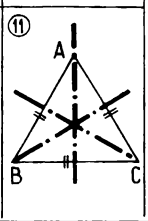












POLYGONES (fig. 1)

Ligne brisée dont les extrémités coïncident : ABCDEF.

triangle	: 3 côtés	**octogone**	: 8 côtés
quadrilatère	: 4 côtés	**décagone**	: 10 côtés
pentagone	: 5 côtés	**dodécagone**	: 12 côtés
hexagone	: 6 côtés	**pentédécagone**	: 15 côtés

Polygone convexe : situé entièrement d'un même côté par rapport à la droite portant l'un quelconque des côtés.

Polygone concave : non convexe.

TRIANGLES

Triangle **scalène** (fig. 2) : trois côtés inégaux.

Triangle **rectangle** (fig. 3) : un angle droit (côté opposé : **hypoténuse**).

Triangle **isocèle** (fig. 4) : deux côtés égaux (troisième côté : **base**).

Triangle **équilatéral** (fig. 5) : trois côtés égaux.

Droites remarquables d'un triangle.

Hauteur (fig. 6) : perpendiculaire menée d'un sommet sur le côté opposé.

Médiane (fig. 7) : droite joignant un sommet au milieu du côté opposé.

Médiatrice (fig. 8) : médiatrice d'un côté.

Bissectrice (fig. 9) : bissectrice d'un angle.
— Intérieure, s'il s'agit de l'un des angles du triangle ;
— Extérieure, s'il s'agit d'un angle formé, en un sommet, par un côté du triangle et le prolongement de l'autre côté.

Un triangle a 3 hauteurs, 3 médianes, 3 médiatrices, 3 bissectrices intérieures et 3 bissectrices extérieures.

Triangle isocèle (fig. 10).

Théorème.

Si un triangle est isocèle, les angles à la base sont égaux.

Si $AB = AC$, on a $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Réciproque.

Si un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.

Si $\widehat{B} = \widehat{C}$, on a $AB = AC$.

Propriété. Le triangle isocèle ABC admet pour **axe de symétrie** la droite AH qui est, à la fois :

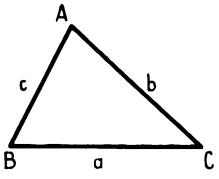
médiatrice de la base,	**médiane** relative à la base,
bissectrice de l'angle opposé à la base.	**hauteur** relative à la base.

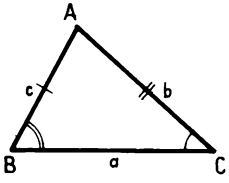
Triangle équilatéral (fig. 11).

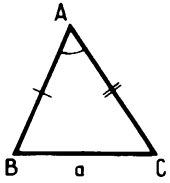
En appliquant les propriétés du triangle isocèle, on établit que : le triangle équilatéral a **trois angles égaux** et qu'il admet **trois axes de symétrie** (hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices intérieures).

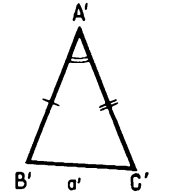
TRIANGLE (2)

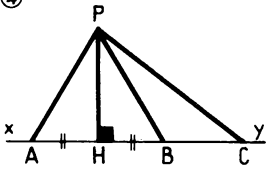
M₁. 50

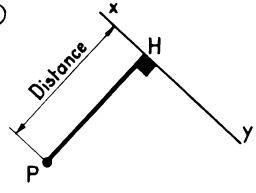
① 

② 

③ 



④ 

⑤ 

CÔTÉS ET ANGLES

Théorème (fig. 1).

Dans un triangle, l'un quelconque des côtés est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

Si, par exemple, $c < b < a$, on a :

$$b - c < a < b + c$$
$$a - c < b < a + c$$
$$a - b < c < a + b$$

Théorème (fig. 2).

Si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

Si $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a $b > c$.

Réciproque. Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Si $b > c$, on a $\widehat{B} > \widehat{C}$.

Théorème (fig. 3).

Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant entre eux un angle inégal, les troisièmes côtés sont inégaux et, au plus grand angle, est opposé le plus grand côté.

Si $\widehat{A} > \widehat{A'}$, on a $a > a'$.

Perpendiculaire et obliques (fig. 4).

Théorème.

Si, par un point extérieur à une droite, on mène, à cette droite, la perpendiculaire et diverses obliques :

1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique :

$$PH < PA ;$$

2° deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales :

$$PA = PB ;$$

3° deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales et celle qui s'en écarte le plus est la plus grande :

$$PC > PA.$$

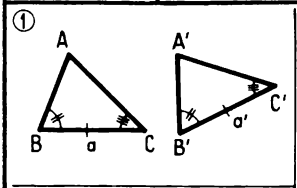
Et réciproquement.

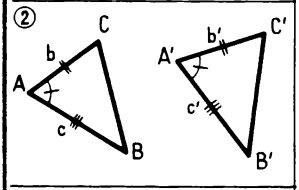
Distance d'un point à une droite (fig. 5), ou distance de ce point au point de la droite qui est le plus rapproché :

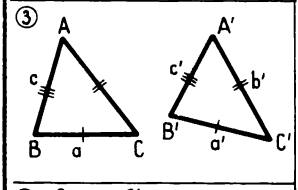
c'est la longueur de la portion de la perpendiculaire menée de ce point à la droite et comprise entre le point et le pied de la perpendiculaire.

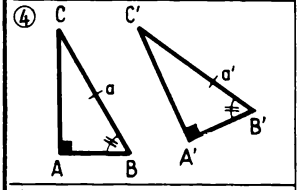
La longueur PH est la **distance** du point P à la droite xy.

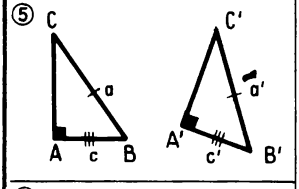
CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

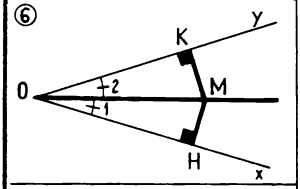


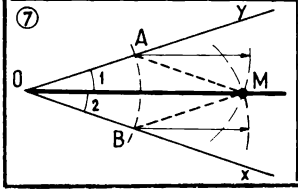












TRIANGLES QUELCONQUES

Trois théorèmes, ou cas d'égalité :

1er Cas (fig. 1).

Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

Les 3 égalités $\begin{cases} a = a' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$ entraînent l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

2e Cas (fig. 2).

Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle égal, ils sont égaux.

Les 3 égalités $\begin{cases} b = b' \\ c = c' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases}$ entraînent l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

3e Cas (fig. 3).

Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

Les 3 égalités $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$ entraînent l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

TRIANGLES RECTANGLES

Deux théorèmes, ou cas d'égalité :

1er Cas (fig. 4).

Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, ils sont égaux.

Les 3 égalités $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} = 1\text{ D} \\ a = a' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$ entraînent l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

2e Cas (fig. 5).

Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, ils sont égaux.

Les 3 égalités $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} = 1\text{ D} \\ a = a' \\ c = c' \end{cases}$ entraînent l'égalité des triangles ABC et A'B'C'.

Application. Pour démontrer l'égalité de deux segments, ou de deux angles, on est souvent amené à établir que deux triangles sont égaux, donc à appliquer l'un des cas d'égalité précédents. Voici deux exemples.

Théorème (fig. 6).

Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, il est équidistant des côtés de cet angle.

Et réciproquement.

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ entraîne MH = MK

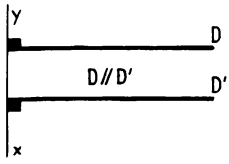
et MH = MK entraîne $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

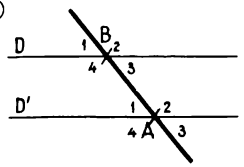
(Comparer les triangles rectangles OHM et OKM).

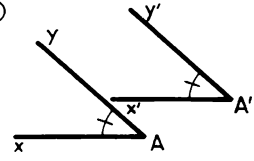
Construction de la bissectrice d'un angle (fig. 7).

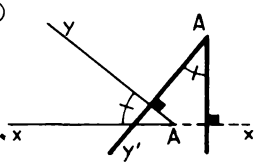
Les triangles OAM et OBM ont, par construction, leurs 3 côtés égaux chacun à chacun. Ils sont égaux (3e cas). Aux côtés égaux AM et BM sont opposés les angles égaux $\widehat{O_1}$ et $\widehat{O_2}$. Par suite, OM est la bissectrice de $x\widehat{O}y$.

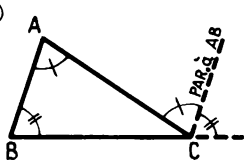
PARALLÉLISME

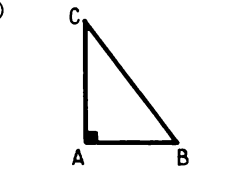
① 

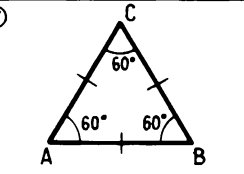
② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

⑦ 

DÉFINITION

Deux droites sont parallèles lorsque, situées dans le même plan, elles n'ont pas de point commun.

Théorème (fig. 1).

Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, elles sont parallèles.

$D \perp xy$ et $D' \perp xy$ entraînent $D \,//\, D'$.

Théorème. **Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite.**

Postulat d'Euclide (ne peut pas être démontré; il est donc admis sans démonstration).

Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.

Théorème. **Si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.**

Théorème. **Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

Droite coupant deux parallèles (fig. 2).

Angles alternes internes. Ex. $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_3}$.

Angles alternes externes. Ex. $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$.

Angles correspondants. Ex. $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$.

Théorème.

Si deux parallèles sont coupées par une sécante :
1° deux angles alternes internes sont égaux;
2° deux angles alternes externes sont égaux ;
3° deux angles correspondants sont égaux.
Et réciproquement.

Angles à côtés parallèles (fig. 3). ***Théorème.***

Si deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux:
1° ils sont **égaux** s'ils sont tous deux aigus (ou obtus);
2° ils sont **supplémentaires** si l'un est aigu et l'autre obtus.

Angles à côtés perpendiculaires (fig. 4). ***Théorème.***

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires deux à deux :
1° ils sont **égaux** s'ils sont tous deux aigus (ou obtus);
2° ils sont **supplémentaires** si l'un est aigu et l'autre obtus.

Somme des angles d'un triangle. ***Théorème*** (fig. 5).

La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \text{ droits} = 180^\circ.$$

Conséquences.

1° Les angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires.**

Fig. 6 : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

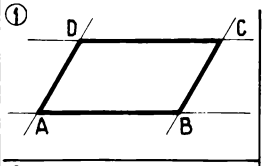
2° Chaque angle d'un triangle équilatéral **vaut 60°.**

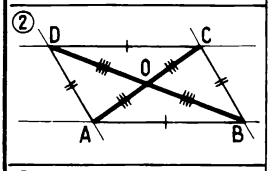
Fig. 7 : $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

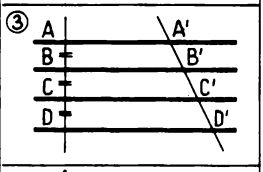
3° La somme des angles d'un quadrilatère convexe **est égale à 360°** (décomposer en 2 triangles).

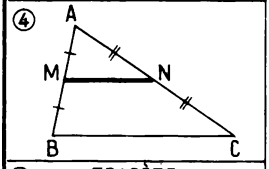
4° La somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est égale à **180° × (n — 2).** (Décomposer en n — 2 triangles).

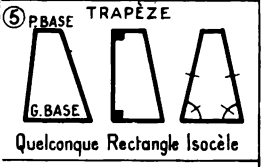
PARALLÉLOGRAMME • TRAPÈZE

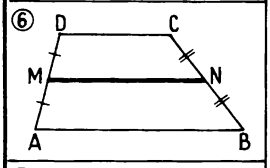


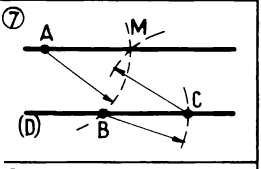


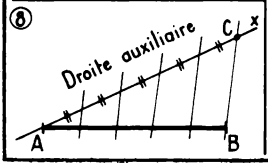












PARALLÉLOGRAMME (fig. 1)

Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

$$AB \,//\, DC \qquad \text{et} \qquad AD \,//\, BC$$

Angles. Côtés. Diagonales (fig. 2).

Théorème.

Dans un parallélogramme :
1° les angles opposés sont égaux deux à deux ;
2° les côtés opposés sont égaux deux à deux ;
3° les diagonales se coupent en un point qui est le milieu de chacune d'elles.

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \widehat{D} \\ AB = CD \quad \text{et} \quad AD = BC \\ OA = OC \quad \text{et} \quad OB = OD \end{array}\right.$$

Et réciproquement.

O est le centre de symétrie du parallélogramme.

Parallèles équidistantes (fig. 3).

Déterminent sur une perpendiculaire commune des segments égaux AB = BC = CD.

Théorème. **Si des parallèles sont équidistantes, elles déterminent sur une sécante quelconque des segments égaux.**

$$A'B' = B'C' = C'D'.$$

Et réciproquement.

Application. ***Théorème*** (fig. 4).

Le segment de droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.

$$MN // BC \qquad \text{et} \qquad MC = \frac{BC}{2}$$

TRAPÈZE (fig. 5)

Quadrilatère convexe dont deux côtés seulement sont parallèles (bases).

Trapèze **rectangle** : 2 angles droits.

Trapèze **isocèle** : 2 côtés égaux et 2 angles égaux.

Théorème (fig. 6).

Le segment de droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et égal à leur demi-somme.

$$MN // AB \qquad \text{et} \qquad MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Applications graphiques.

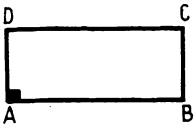
1° **Par un point A, mener la parallèle à une droite xy** (fig. 7).

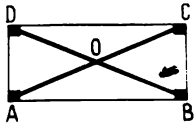
Tracer les arcs de centres A, B et C et joindre A à M ; dans le parallélogramme ABCM, la droite AM est parallèle à (D).

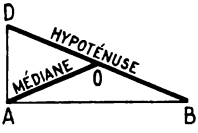
2° **Partager un segment de droite AB en n parties égales** (exemple n = 5, fig. 8).

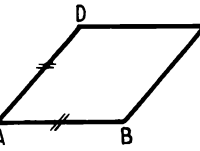
Sur une droite auxiliaire (quelconque) Ax, porter 5 segments égaux (quelconques). Joindre C à B et mener les parallèles à BC : ces parallèles sont équidistantes, d'où 5 divisions égales sur AB.

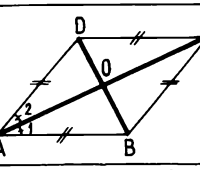
RECTANGLE • Llosange • CARRÉ

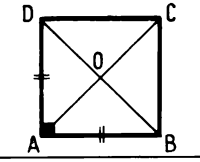
① 

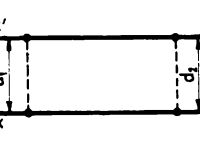
② 

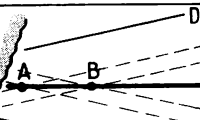
③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

⑦ 

⑧ 

RECTANGLE (fig. 1)

Parallélogramme qui a un angle droit ($\widehat{A} = 1$ droit). Possède les propriétés du parallélogramme.

Propriétés particulières (fig. 2).

Théorème. **Dans un rectangle :**

1° **les quatre angles sont droits ;**
2° **les diagonales sont égales.**

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 1 \text{ droit} \quad \text{et} \quad AC = BD.$$

Application. ***Théorème*** (fig. 3).

Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.

$$AO = \frac{BD}{2}$$

LOSANGE (fig. 4)

Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux (AB = AD).
Possède les propriétés du parallélogramme.

Propriétés particulières (fig. 5).

Théorème. **Dans un losange :**

1° **les quatre côtés sont égaux ;**
2° **les diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre et bissectrices des angles du losange.**

$$\begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ AC \perp BD \text{ et, par exemple, } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}. \end{cases}$$

Les diagonales sont **axes de symétrie.**

CARRÉ (fig. 6)

Parallélogramme qui a un angle droit compris entre deux côtés égaux.
Possède les propriétés du parallélogramme, du rectangle et du losange.

Applications graphiques.

Résultant des propriétés du rectangle : si deux droites sont parallèles, la distance d'un point de l'une des droites à l'autre est constante.

Fig. 7. x'y' // xy ; $d_1 = d_2$ = distance des parallèles.

1° Construction de la parallèle, à une distance **d**, d'une droite.
Sur deux perpendiculaires menées d'un même côté de la droite, porter la longueur **d** et joindre les points obtenus.

2° **Tracé de la bissectrice d'un angle dont le sommet est inaccessible** (D et D', côtés de l'angle fig. 8).

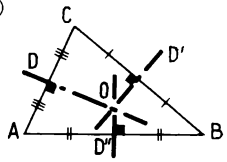
1° Tracer D_1 et D'_1 parallèles à D et D' à la même distance d_1 } intersection A.

2° Même opération pour deux autres droites D_2 et D'_2 (distance d_2) } intersection B.

Joindre les points A et B : la droite AB passe par le point d'intersection de D et D' ; elle est bissectrice de l'angle aigu formé par ces droites.

M_1. 55 — DROITES CONCOURANTES [1]

①



Médiatrices d'un triangle (fig. 1).

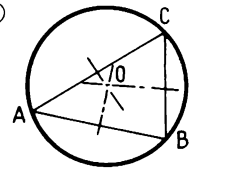
Théorème.

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
Démontrer que le point d'intersection O de D et D' est aussi sur D'' (M_1. 48).

Application.

Centre du cercle passant par trois points A, B, C, non en ligne droite (fig. 2) : point de concours des **médiatrices** du triangle ABC.
Ce cercle est **circonscrit** au triangle ABC.

②



Bissectrices intérieures d'un triangle (fig. 3).

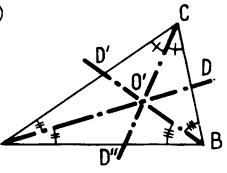
Théorème.

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.
Démontrer que le point d'intersection O' de D et D' est aussi sur D'' (M_1. 51)

Application.

Centre du cercle tangent (Ma 56) **aux trois côtés** d'un triangle (fig. 4) : point de concours O' des bissectrices intérieures du triangle ABC.
Ce cercle est **inscrit** dans le triangle ABC.

③

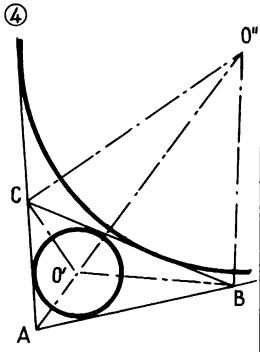


Bissectrices intérieures et bissectrices extérieures d'un triangle (fig. 4).

Théorème.

Une bissectrice intérieure d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles d'un triangle sont concourantes.
Démontrer que le point d'intersection O'' des bis. extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ est aussi sur la bis. int. de $\widehat{A}$.
Le point O'' est le centre du cercle tangent au côté BC et aux prolongements des deux autres côtés, ou **cercle ex-inscrit** dans l'angle $\widehat{A}$.
Construction analogue des centres des cercles ex-inscrits dans les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

④

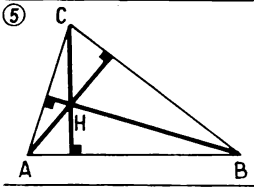


Hauteurs d'un triangle (fig. 5).

Théorème.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours H s'appelle **l'orthocentre** du triangle (ortho ; angle droit : hauteur et côté).

⑤

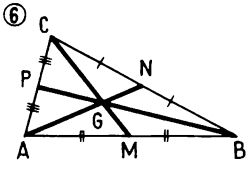


Médianes d'un triangle (fig. 6).

Théorème.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point situé aux 2/3 de chacune d'elles à partir du sommet.
Le point de concours G est le **centre de gravité** du triangle.

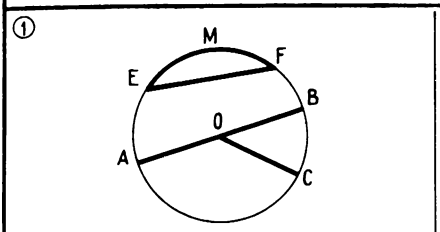
⑥

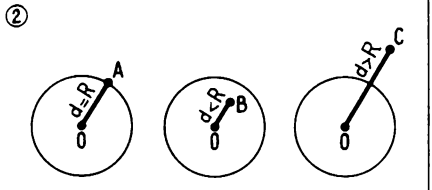


(1) **Droites concourantes** : qui passent par le même point, dit « **point de concours** ».

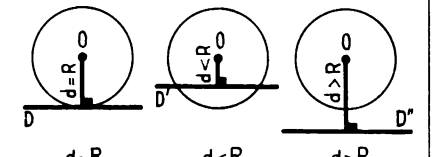
CIRCONFÉRENCE • CERCLE

M_1. 56

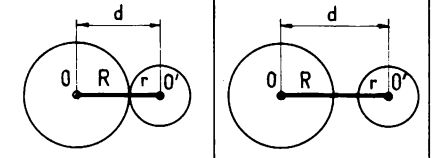


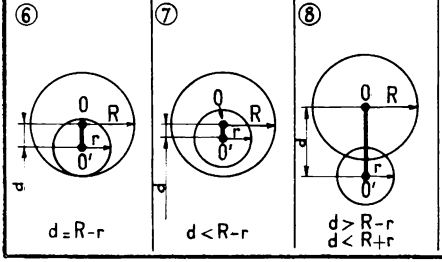


d=R d<R d>R



d=R d<R d>R





CIRCONFÉRENCE

Ligne plane, courbe, fermée, dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe.

CERCLE

Portion de plan **intérieure** à la circonférence.

Fig. 1. **Centre** O — **Rayon** OC — **Diamètre** AB

Corde EF — **Arc** EMF — La corde EF **sous-tend** l'arc EMF.

Positions relatives d'un point et d'un cercle (fig. 2).

Cercle de rayon R.
Distance du centre au point : **d.**
Exemple : R = 25 *mm*.

d = R = 25 *mm*	Point A **sur** le cercle.
d = 13 *mm* < R	Point B **intérieur** au cercle.
d = 30 *mm* > R	Point C **extérieur** au cercle.

Positions relatives d'une droite et d'un cercle (fig. 3).

Distance du centre à la droite : **d.**
Exemple : R = 25 *mm*.

d = R = 25 *mm*	Droite D **tangente** au cercle.
d = 12 *mm* < R	Droite D' **sécante** au cercle.
d = 27 *mm* > R	Droite D'' **extérieure** au cercle.

Positions relatives de deux cercles (fig. 4 à 8).

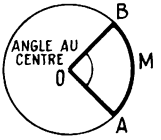
Distance de deux centres : d.
Exemple : R = 25 *mm* et r = 15 *mm*.

Fig. 4.	Fig. 5.
d = 40 = 25 + 15	d = 48 > 25 + 15
Cercles tangents extérieurement.	**Cercles extérieurs.**

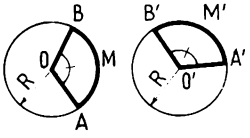
Fig. 6	Fig. 7	Fig. 8
d = 10 = 25 — 15	d = 5 < 25 — 15	d = 30 30 > 25 — 15 et 30 < 25 + 15
Cercles tangents intérieurement	**L'un des cercles est intérieur à l'autre.**	**Cercles sécants.**

ARCS • CORDES

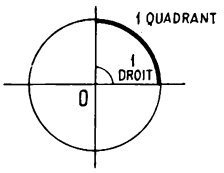
①



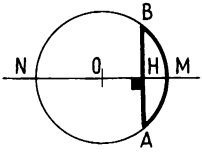
②



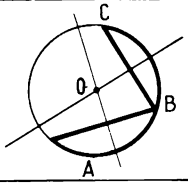
③



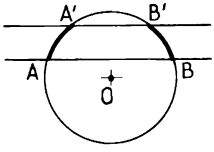
④



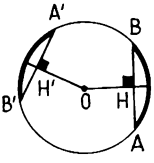
⑤



⑥



⑦



ARCS ET ANGLES AU CENTRE (fig. 1)

L'arc $\overset{\frown}{AMB}$ est la partie de la circonférence comprise entre deux points A et B de celle-ci.

L'angle au centre $\overset{\frown}{AOB}$ est l'angle des deux rayons aboutissant aux extrémités de l'arc.

L'angle au centre $\overset{\frown}{AOB}$ **intercepte** l'arc AMB.

Propriété des angles au centre égaux (cercles de même rayon R : fig. 2).

Théorème.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, des angles au centre égaux interceptent des arcs égaux.

Si $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{A'O'B'}$, on a $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{A'M'B'}$.
Et **réciproquement.**

Quadrant (ou quart de circonférence, fig. 3).

Théorème.

Si un angle au centre est droit, il intercepte un quadrant, et réciproquement.

Le quadrant est **l'unité d'arc** (mêmes sous-multiples que l'angle droit; M_1. 47).

Donc :

un angle au centre de **n** degrés intercepte un arc de **n** degrés et réciproquement.

ARCS ET CORDES

Diamètre perpendiculaire à une corde (fig. 4).

Théorème.

Si, par le centre d'un cercle, on mène la perpendiculaire à une corde, elle divise la corde et chacun des arcs sous-tendus en deux parties égales.

Si OH $\perp$ AB, on a $\begin{cases} HA = HB \\ MA = MB \\ NA = MB \end{cases}$ Et **réciproquement.**

Une réciproque à retenir : la perpendiculaire à une corde en son milieu passe par le centre du cercle.

Application à la détermination du centre d'un cercle : mener les médiatrices de AB et BC; elles se coupent au point cherché O (fig. 5).

Cordes parallèles (fig. 6).

Théorème.

Si deux cordes sont parallèles, elles déterminent des arcs égaux.

Si AB // A'B', on a $\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$.

Arcs égaux. Cordes. Distances au centre (fig. 7).

Théorème.

Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux :

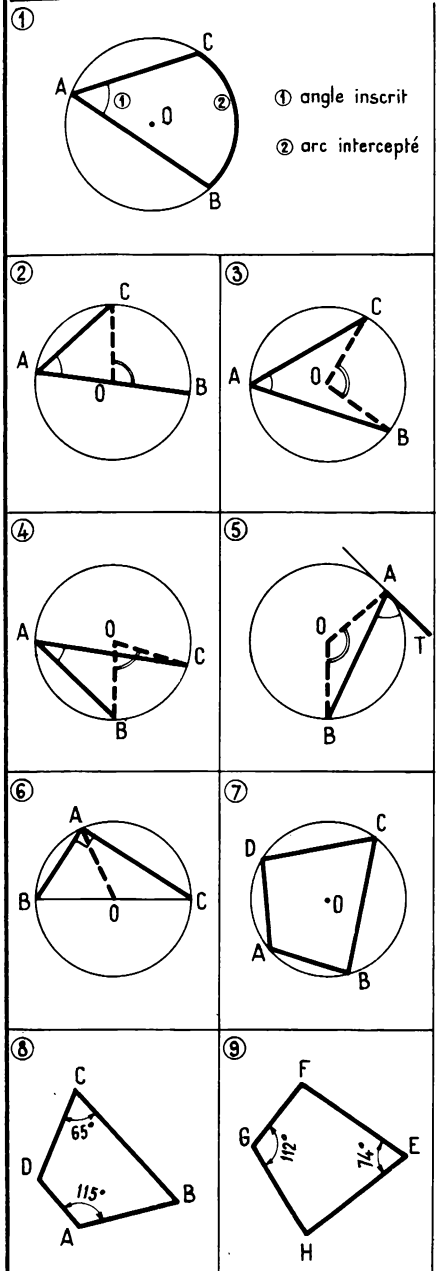
1° **si deux arcs sont égaux, les cordes qui les sous-tendent sont égales;**

2° **si deux cordes sont égales, elles sont équidistantes au centre.**

Si $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$, on a $\begin{cases} AB = A'B' \\ \text{d'où} \\ OH = OH' \end{cases}$ Et **réciproquement.**

ANGLE INSCRIT

M_1. 58



ANGLE INSCRIT DANS UN CERCLE (fig. 1).

Angle formé par deux cordes issues d'un même point de ce cercle.

$\widehat{BAC}$ est **inscrit** dans le cercle O.

$\widehat{BAC}$ **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Cette définition s'étend à l'angle formé par la **tangente** à un cercle en un point et une **corde** passant par ce point.

Théorème.

Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Quatre cas de figure :

Fig. 2. Le centre O est **sur** l'un des côtés de l'angle inscrit.

Fig. 3. Le centre O est à **l'intérieur** de l'angle inscrit.

Fig. 4. Le centre O est à l'**extérieur** de l'angle inscrit.

Fig. 5. L'un des côtés de l'angle inscrit est **tangent** au cercle.

Fig. 2. 3. 4

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

ou mes. $\widehat{BAC} = \dfrac{\text{mes. } \overset{\frown}{BC}}{2}$

Fig. 5

$$\widehat{BAT} = \frac{\widehat{BOA}}{2}$$

ou mes. $\widehat{BAT} = \dfrac{\text{mes. } \overset{\frown}{BA}}{2}$

Angle inscrit interceptant un demi-cercle (fig. 6).

Théorème. **Si un angle inscrit intercepte un demi-cercle, il est droit.**

Si BC est un diamètre, $\widehat{BAC} = 1$ droit et **réciproquement.**

QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UN CERCLE (fig. 7)

Ses quatre sommets sont sur ce cercle.

Théorème. **Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, ses angles opposés sont supplémentaires.**

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 2 \text{ droits}$$
$$\widehat{B} + \widehat{D} = 2 \text{ droits.}$$

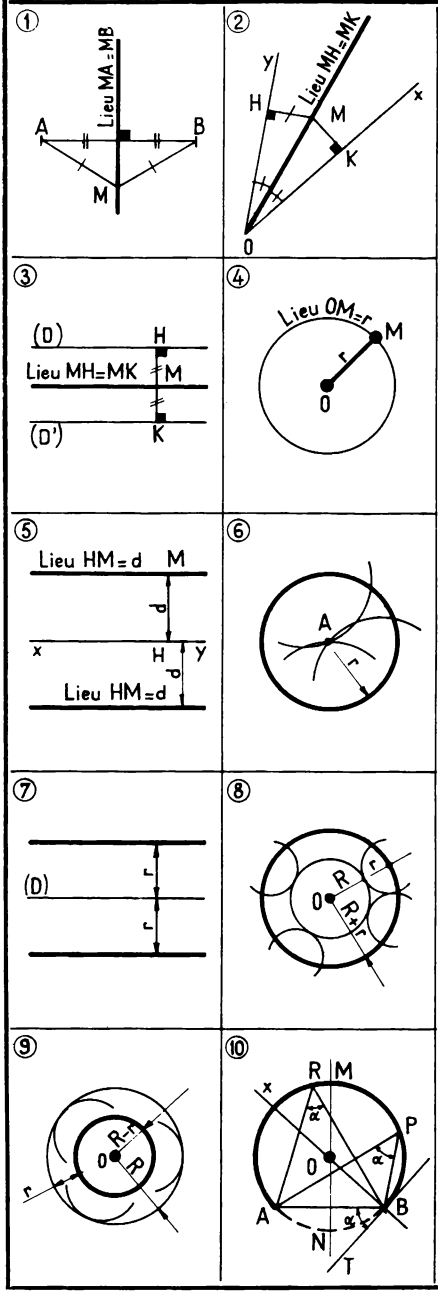
Réciproque. **Si deux angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires, ce quadrilatère peut être inscrit dans un cercle.**

On dit qu'il est **inscriptible** (dans un cercle).

Exemple (fig. 8) : $115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$; le quadrilatère ABCD est **inscriptible.**

Sur la figure 9 : $112^\circ + 74^\circ = 186^\circ$. Or $186^\circ \neq 180^\circ$; le quadrilatère EFGH n'est pas inscriptible.

M_1. 59 — LIEUX GÉOMÉTRIQUES



DÉFINITION

Figure formée par l'ensemble des points ayant une même propriété géométrique, ce qui signifie :

1° que tous les points de cette figure ont une même propriété;	2° que tous les points qui ont cette propriété sont sur la figure.

EXEMPLES

Fig. 1. Lieu des points équidistants de A et B : médiatrice de AB.

Fig. 2. Lieu des points équidistants des deux côtés d'un angle xOy : bissectrice de l'angle.

Fig. 3. Lieu des points équidistants de deux droites parallèles (D) et (D') : par. équidistante des deux droites.

Fig. 4. Lieu des points situés à une distance r d'un point O : cercle de centre O et de rayon r.

Fig. 5. Lieu des points situés à une distance d d'une droite xy : ensemble des deux parallèles à xy, à la distance d.

Fig. 6. Lieu des centres des cercles de rayon r passant par A : cercle de centre A et de rayon r.

Fig. 7. Lieu des centres des cercles de rayon r tangents à la droite (D) : ensemble des deux parallèles à (D), à la distance r.

Fig. 8. Lieu des centres des cercles de rayon r tangents extérieurement au cercle (O, R) : cercle de centre O et de rayon R + r.

Fig. 9. Lieu des centres des cercles de rayon r tangents intérieurement au cercle (O, R) : cercle de centre O et de rayon R — r.

Fig. 10. Lieu des points d'où l'on voit AB sous un angle α.

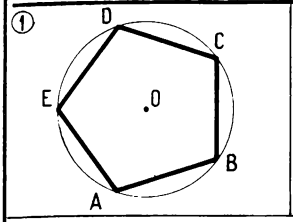
Construction : tracer $\widehat{ABT} = \alpha$ et la perpendiculaire Bx à BT ; tracer la médiatrice de AB. Ces droites se coupent en O. Tracer l'arc de cercle de centre O, et passant par A et B :

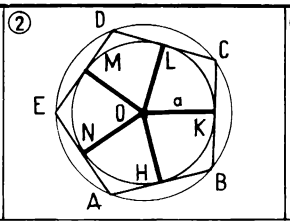
$$\widehat{APB} = \widehat{ARB} = \widehat{ABT} = \alpha.$$

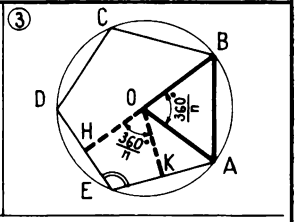
Le lieu des points d'où l'on voit AB sous l'angle α se compose de l'arc AMB et de son symétrique par rapport à AB.

POLYGONES RÉGULIERS

M_1. 60







Polygone régulier.

Ses côtés sont **égaux**, ses angles sont **égaux**.

Théorème (fig. 1).

Si une circonférence est divisée en parties égales, les cordes qui joignent les points de division consécutifs forment un polygone régulier.

Si $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \ldots$, on a $\begin{cases} AB = BC = \ldots \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \ldots \end{cases}$

Réciproque.

Si un polygone est régulier, il est inscriptible dans un cercle.

Apothème. Cercle inscrit (fig. 2).

OH = OK = OL ... = **apothème a** du polygone.

Le cercle de centre O et de rayon **a** est **inscrit** dans le polygone.

Angle au centre d'un polygone (fig. 3) :

Angle formé par deux rayons consécutifs, ou deux apothèmes consécutifs.

Dans un polygone de **n** côtés :

$$\widehat{AOB} = \widehat{HOK} = \frac{360^\circ}{n}$$

Angle d'un polygone (fig. 3) :

Angle formé par deux côtés consécutifs. Dans un polygone de **n** côtés :

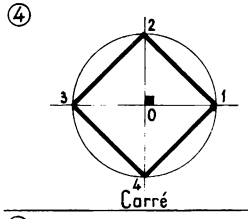
$$\widehat{AED} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

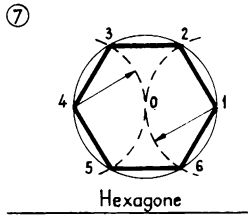
(quadrilatère inscriptible OHKE)

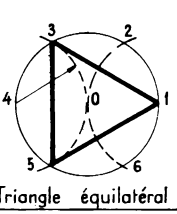
Polygones réguliers concaves ou étoilés.

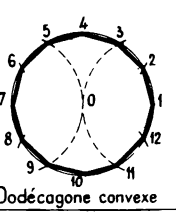
Exemples : **octogone étoilé** (fig. 6 : joindre de 3 en 3) ; **dodécagone étoilé** (fig. 12 : joindre de 5 en 5).

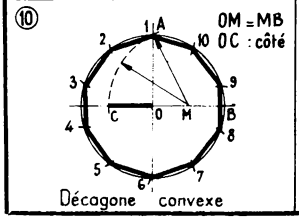
INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS

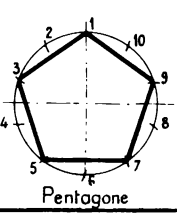


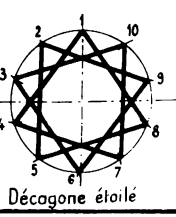




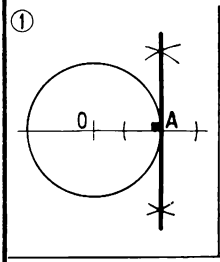


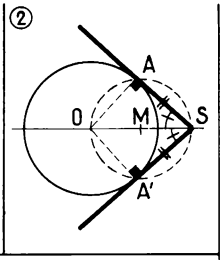


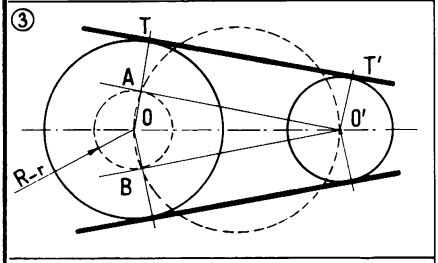


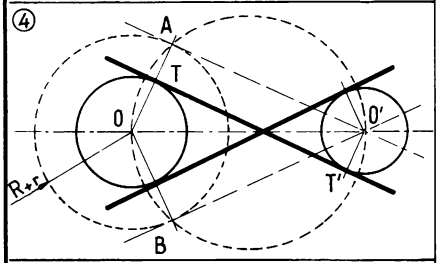


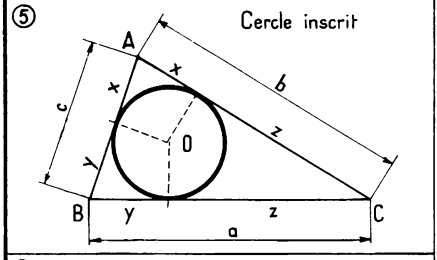
M_1. 61 DROITES ET CERCLES TANGENTS

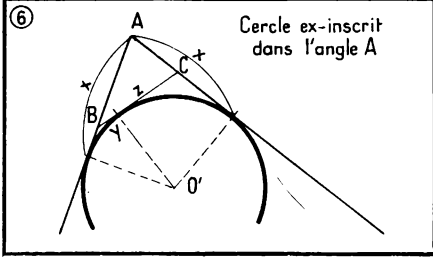












DIFFÉRENTS CAS

Tangente à un cercle en l'un de ses points A (fig. 1).

Tracer le rayon OA et lui mener la perpendiculaire en A.

Tangentes à un cercle, passant par un point S, extérieur à ce cercle (fig. 2).

Tracer le cercle de diamètre SO (centre M), qui coupe le cercle donné aux points de tang. cherchés A et A'.

Théorème (fig. 2).

1° Les portions de tangentes menées d'un point à un cercle sont égales.

2° La droite qui joint ce point au centre est bissectrice de l'angle des deux tangentes.

$$SA = SA' \quad \text{et} \quad \widehat{OSA} = \widehat{OSA'}$$

Tangentes communes à deux cercles (rayons R et r) :

1. **Tangentes communes extérieures** (fig. 3).

Tracer : le cercle O, de rayon R — r;
les tangentes O'A et O'B;
les rayons OA et OB, d'où T;
TT' // O'A.

2. **Tangentes communes intérieures** (fig. 4).

Tracer : le cercle O, de rayon R + r;
les tangentes O'A et O'B;
les rayons OA et OB, d'où T;
TT' // O'A.

Cercles tangents aux trois côtés d'un triangle.

1° **Cercle inscrit** (fig. 5). O, point de concours des bissectrices intérieures.

Segments déterminés sur les côtés.

En posant $\frac{a+b+c}{2} = p$

Exemple :

$x = p - a$ | $a = 35\ mm$
$y = p - b$ | $b = 32\ mm$
$z = p - c$ | $c = 17\ mm$

$$p = \frac{35+32+17}{2} = 42\ mm$$

D'où $x = 42 - 35 = 7\ mm$
$y = 42 - 32 = 10\ mm$
$z = 42 - 17 = 25\ mm.$

2° **Cercles ex-inscrits** (fig. 6). O', point de concours de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ et des bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Segments déterminés sur les côtés.

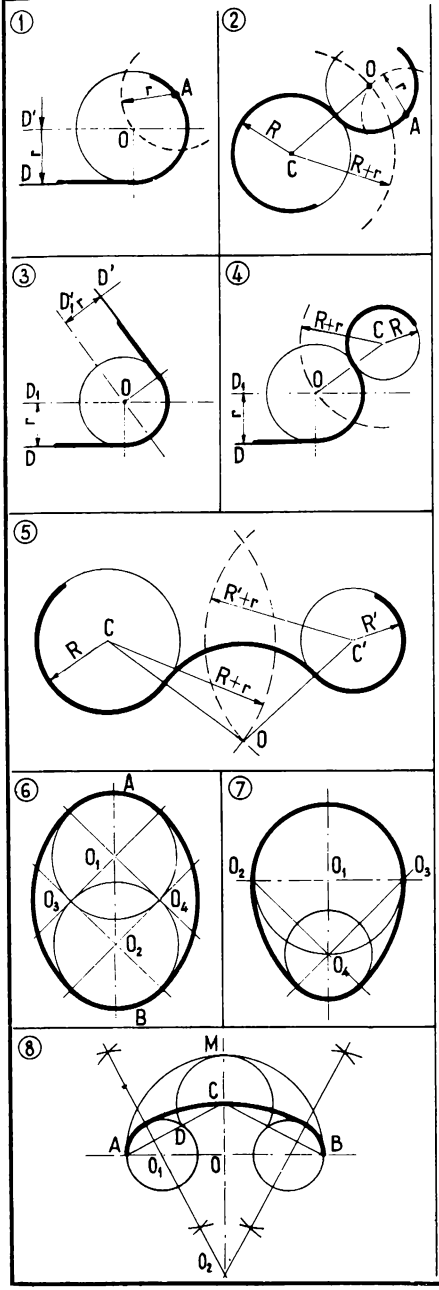
Exemple :

$x = p$ | $a = 18\ mm$
$y = p - c$ | $b = 13\ mm$
$z = p - b$ | $c = 21\ mm$

$$p = \frac{18+13+21}{2} = 26\ mm$$

D'où $x = 26\ mm$
$y = 26 - 21 = 5\ mm$
$z = 26 - 13 = 13\ mm$

RACCORDEMENTS



CAS USUELS

Raccordement de deux lignes :

Tracé d'une troisième ligne tangente aux deux lignes données.

Dans les figures 1 à 5, le rayon **r** du cercle de raccordement est donné : **le centre O de ce cercle est à l'intersection de deux lieux géométriques** (indiqués en traits interrompus sur les figures).

Fig. 1. Tracer un cercle de rayon r passant par un point A et tangent à une droite D : O est à l'intersection de (A, r) et D′ // D, à la distance **r**.

Fig. 2. Tracer un cercle de rayon r passant par un point A et tangent à un cercle (C, R) : O est à l'intersection de (A, r) et de (C, R + r).

Fig. 3. Tracer un cercle de rayon r tangent à deux droites D et D′ : O est à l'intersection de :

$\left\{ \begin{array}{l} D_1 // D \quad \text{(distance } r\text{)} \\ D'_1 // D' \quad \text{(distance } r\text{)}. \end{array} \right.$

Fig. 4. Tracer un cercle de rayon r tangent à une droite D et à un cercle (C, R) : O est à l'intersection de :

$\left\{ \begin{array}{l} D_1 // D \quad \text{(distance } r\text{)} \\ C\,(R + r). \end{array} \right.$

Fig. 5. Tracer un cercle de rayon r tangent à deux cercles (C, R) et (C',R') : O est à l'intersection de :

(C, R + r) et (C′, R′ + r).

APPLICATIONS

Ovale au tiers (fig. 6).

On donne le grand axe AB.

Diviser AB : $AO_1 = O_1O_2 = O_2B$.

Tracer les cercles des centres O_1 et O_2, puis les cercles de centres O_3 et O_4.

Ove (fig. 7).

On donne O_2O_3. Tracer les cercles de centre O_1, puis de centres O_2 et O_3, enfin de centre O_4.

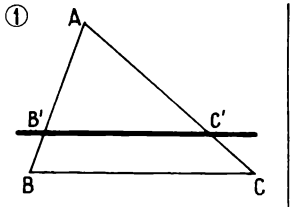
Anse de panier (fig. 8).

On donne AB et OC.

Tracer le cercle de centre O et de rayon OA, puis le cercle de centre C et de rayon CM qui coupe AC en D. La **médiatrice** de AD coupe les axes en O_1 et O_2.

Tracer les cercles (O_1, O_1A) et (O_2, O_2C).

M_1. 63 — THÉORÈME DE THALÈS [1]



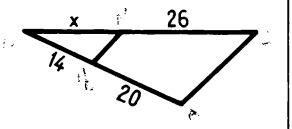
Théorème (fig. 1).

Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.

Si B'C' // BC, on a $\frac{B'A}{B'B} = \frac{C'A}{C'C}$

Et réciproquement.

Exemple (fig. 2) : $\frac{x}{14} = \frac{26}{20}$ d'où $x = \frac{14 \times 26}{20} = 18{,}2$

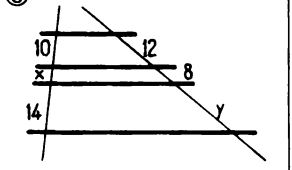


Généralisation (fig. 3) : plusieurs parallèles.

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{8} = \frac{14}{y}.$$

Calcul de x $12x = 10 \times 8$ $x = \frac{10 \times 8}{12} = 6{,}66$

Calcul de y $10y = 12 \times 14$ $y = \frac{12 \times 14}{10} = 16{,}8.$

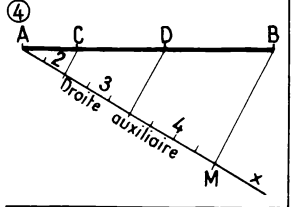


PROBLÈMES

1. **Partager AB en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 4** (fig. 4).

Sur une droite auxiliaire Ax, porter 2, puis 3, puis 4 unités de longueur (unité quelconque). Tracer BM et mener les parallèles à BM :

$$\frac{AC}{2} = \frac{CD}{3} = \frac{DB}{4}.$$



2. **Connaissant la longueur de AB, calculer AC, CD et DB.**

Exemple : AB = 153 *mm*.

On a :

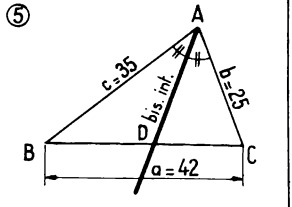
$$\frac{AC}{2} = \frac{CD}{3} = \frac{DB}{4} = \frac{AC + CD + DB}{2 + 3 + 4} = \frac{AB}{9} \qquad (M_1.\ 13)$$

D'où : $AC = \frac{2AB}{9}$	$CD = \frac{3AB}{9} = \frac{AB}{3}$	$DB = \frac{4AB}{9}$
$AC = \frac{2 \times 153}{9} = 34\ mm$	$CD = \frac{153}{3} = 51\ mm$	$DB = \frac{4 \times 153}{9} = 68\ mm$

APPLICATION

Théorème.

Une bissectrice d'un triangle partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents. Et réciproquement.



1er cas (fig. 5)

Bissectrice intérieure AD

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

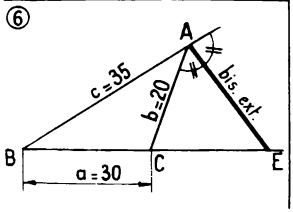
Formules :

$DB = \frac{ac}{b + c}$ $DC = \frac{ab}{b + c}$

Exemple : (fig. 5).

$DB = \frac{42 \times 35}{60} = 24{,}5$

$DC = \frac{42 \times 25}{60} = 17{,}5$



2e cas (fig. 6)

Bissectrice extérieure AE

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Formules :

$EB = \frac{ac}{c - b}$ $EC = \frac{ab}{c - b}$

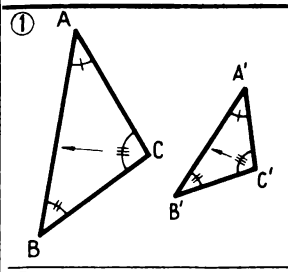
Exemple : (fig. 6).

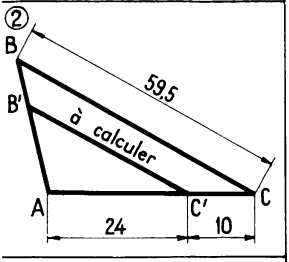
$EB = \frac{30 \times 35}{15} = 70$

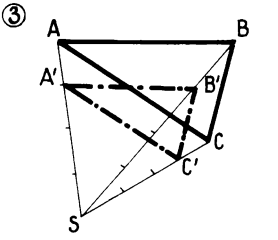
$EC = \frac{30 \times 20}{15} = 40$

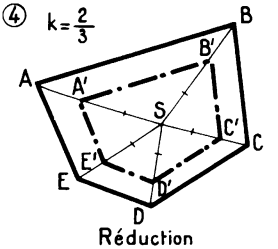
(1) THALÈS : Philosophe et mathématicien grec (640 avant notre ère).

FIGURES SEMBLABLES

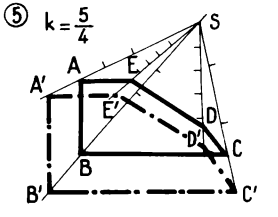
① 

② 

③ 

④ 

Réduction

⑤ 

Agrandissement

TRIANGLES SEMBLABLES (fig. 1)

Triangles qui ont :

1° **leurs angles égaux chacun à chacun :**

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'} \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

2° **leurs côtés homologues (côtés opposés aux angles égaux) proportionnels.**

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \text{rapport de similitude de ABC à A'B'C'}$$

Les trois cas de similitude.

Deux triangles sont semblables s'ils ont :
ou 1° **deux angles égaux chacun à chacun** (1er cas) ;
ou 2° **un angle égal compris entre deux côtés proportionnels** (2e cas) ;
ou 3° **leurs trois côtés proportionnels** (3e cas).

Application (fig. 2) : B'C' étant parallèle à BC, calculer la longueur B'C'.

Les triangles AB'C' et ABC étant semblables (1er cas) :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{B'C'}{59,5} = \frac{24}{34}$$

$$\text{D'où} \quad B'C' = \frac{59,5 \times 24}{34} = \mathbf{42.}$$

TRIANGLES HOMOTHÉTIQUES (fig. 3)

Joindre un point quelconque S aux sommets du triangle ABC, puis marquer les points A', B', C', tels que :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} \qquad (= \frac{3}{4} \text{ sur la figure 3})$$

Le triangle A'B'C' est **homothétique** du triangle ABC (centre d'homothétie S, rapport d'homothétie 3/4).

Deux triangles homothétiques sont semblables, mais deux triangles semblables ne sont pas toujours homothétiques.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES (fig. 4 et 5).

Pour construire la figure homothétique d'une figure donnée, le rapport d'homothétie étant **k**, il suffit d'étendre la construction de la figure 3 à un **nombre quelconque de points.**

1er Exemple (fig. 4) $\quad k = \frac{2}{3} < 1$

A'B'C'D'E' est homothétique de ABCDE : on a obtenu une **réduction** de ce dernier.

2e Exemple (fig. 5) $\quad k = \frac{5}{4} > 1$

A'B'C'D'E' est homothétique de ABCDE : on a obtenu un **agrandissement** de ce dernier.

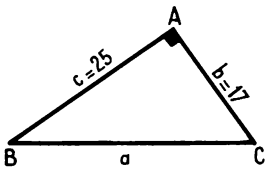
Deux figures sont semblables s'il existe une troisième figure égale à l'une et homothétique de l'autre.

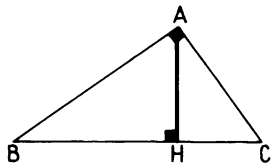
Deux figures homothétiques sont semblables, mais deux figures semblables ne sont pas toujours homothétiques.

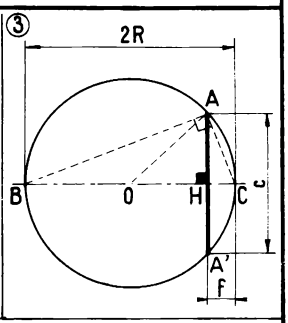
M_1. 65

THÉORÈME DE PYTHAGORE[1] (I)

APPLICATION AU TRIANGLE RECTANGLE

① 

② 

③ 

RELATIONS MÉTRIQUES

Théorème de Pythagore (fig. 1)

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (1)$$

Exemple : $b = 17$; $c = 25$.

$$a^2 = 25^2 + 17^2$$
$$= 625 + 289 = 914$$
$$a = \sqrt{914} = \mathbf{30{,}23}.$$

Dans un triangle rectangle :

1. **La hauteur relative à l'hypoténuse** est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur celle-ci.

$$AH^2 = HB \times HC \quad (2)$$

2. **Chaque côté de l'angle droit** est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur celle-ci.

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = BC \times BH \\ AC^2 = BC \times HC \end{array}\right\} \quad (3)$$

3. **Le produit des deux côtés de l'angle droit** est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante.

$$AB \times AC = BC \times AH \quad (4)$$

Rayon, corde et flèche d'un arc de cercle **ACA'** (fig. 3).

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = f\ (2R - f) \qquad c^2 = 4\ (2\,Rf - f^2)$$
$$\frac{c^2}{4} = 2\,Rf - f^2 \qquad [\text{d'après } (2)]$$

(1) PYTHAGORE. Mathématicien grec, 580 avant notre ère.

APPLICATIONS

Corde (c)

Calcul de **c**

$$c = 2\sqrt{2Rf - f^2}$$

Exemple (fig. 4)

Rayon (R)

Calcul de **R**

$$2Rf = \frac{c^2}{4} + f^2$$
$$R = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

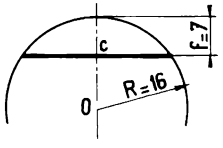
Exemple (fig. 5)

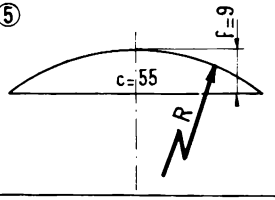
Flèche (f)

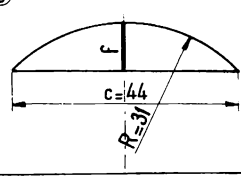
Calcul de **f**

$$f = OC - OH \quad \text{(fig. 3)}$$
$$f = R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

Exemple (fig. 6)

④ 

⑤ 

⑥ 

On donne R et f.

$$c = 2\sqrt{2 \times 16 \times 7 - 7^2}$$
$$c = 2\sqrt{224 - 49}$$
$$= 2\sqrt{175} = 2 \times 13{,}23$$
$$c = \mathbf{26{,}46}$$

On donne c et f.

$$R = \frac{55^2}{8 \times 9} + \frac{9}{2}$$
$$R = \frac{3\,025}{72} + 4{,}5$$
$$R = 42{,}01 + 4{,}5 = \mathbf{46{,}51}.$$

On donne R et c.

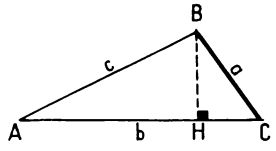
$$f = 31 - \sqrt{31^2 - \frac{44^2}{4}}$$
$$f = 31 - \sqrt{961 - 484}$$
$$= 31 - \sqrt{477}$$
$$f = 31 - 21{,}84 = \mathbf{9{,}16}.$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE (2)

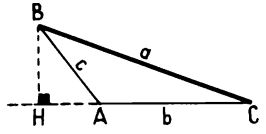
APPLICATION AUX TRIANGLES QUELCONQUES

M_1. 66

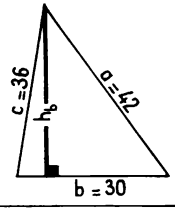
①



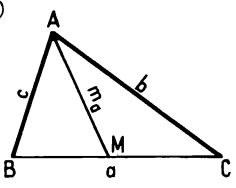
②



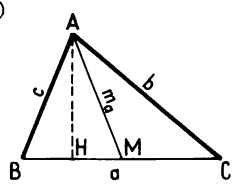
③



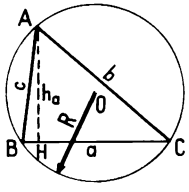
④



⑤



⑥



Carré d'un côté d'un triangle.

1° côté opposé à un **angle aigu.** (fig. 1) $(A < 90°)$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AH.$$

2° côté opposé à un **angle obtus.** (fig. 2) $(A > 90°)$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AH.$$

Application. — Calcul des hauteurs d'un triangle connaissant les côtés **a, b, c** (fig. 3).

FORMULES

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exemple. Calcul de h_b (fig. 3)

$a = 42$, $b = 30$, $c = 36$

Donc $p = 54$

$$h_b = \frac{2}{30}\sqrt{54(54-42)(54-30)(54-36)}$$

$$h_b = \frac{1}{15}\sqrt{54 \times 12 \times 24 \times 18} = \frac{1}{15}\sqrt{279\,936}$$

$$h_b = \frac{529{,}09}{15} = \mathbf{35{,}27}.$$

Somme des carrés de deux côtés d'un triangle (fig. 4).

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

Application au calcul des médianes :

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

Exemple

$a = 18$, $b = 14$, $c = 12$

$$m_a = \sqrt{\frac{14^2+12^2}{2} - \frac{18^2}{4}} = \sqrt{170-81}$$

$$m_a = \sqrt{89} = \mathbf{9{,}43}.$$

Différence des carrés de deux côtés d'un triangle (fig. 5).

$$b^2 - c^2 = 2a \times MH.$$

Application au calcul de la projection MH de la médiane sur le côté BC :

$$MH = \frac{b^2-c^2}{2a}$$

Exemple

$a = 18$, $b = 14$, $c = 12$

$$MH = \frac{14^2-12^2}{2 \times 18} = \frac{196-144}{36}$$

$$MH = \frac{52}{36} = \mathbf{1{,}44}.$$

Produit de deux côtés d'un triangle (fig. 6).

$$b \times c = 2R \times h_a.$$

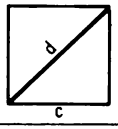
Application au calcul du rayon du cercle circonscrit :

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Exemple $a = 12$, $b = 14$, $c = 20$ $(p = 23)$

$$R = \frac{12 \times 14 \times 20}{4\sqrt{23 \times 11 \times 9 \times 3}} = \frac{12 \times 14 \times 5}{82{,}65} = \mathbf{10{,}16}.$$

CALCULS
RELATIFS AUX POLYGONES RÉGULIERS

① 

CARRÉ (fig. 1)

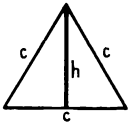
$d = c\sqrt{2} = c \times 1{,}414$

$c = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = d \times 0{,}707$

Applications numériques

$c = 22,\ d = 22 \times 1{,}414 = 31{,}11$

$d = 26,\ c = 26 \times 0{,}707 = 18{,}38$

② 

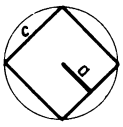
TRIANGLE ÉQUILATÉRAL (fig. 2)

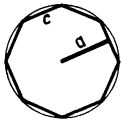
$h = \frac{c\sqrt{3}}{2} = c \times 0{,}866$

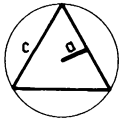
$c = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3} = h \times 1{,}155$

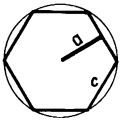
$c = 24,\ h = 24 \times 0{,}866 = 20{,}78$

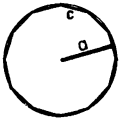
$h = 15,\ c = 15 \times 1{,}155 = 17{,}32$

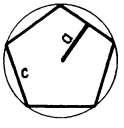
③ 

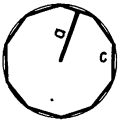
④ 

⑤ 

⑥ 

⑦ 

⑧ 

⑨ 

Polygones réguliers convexes inscrits dans un cercle de rayon R.

CARRÉ (fig. 3)

$c = R\sqrt{2}$

$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Applications numériques (R = 15)

$c = 15 \times 1{,}414 = 21{,}21$

$a = \frac{15 \times 1{,}414}{2} = 10{,}60$

OCTOGONE RÉGULIER (fig. 4)

$c = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$a = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

$c = 15\sqrt{2 - 1.414}$ | $a = \frac{15}{2}\sqrt{2 + 1{,}414}$

$c = 15\sqrt{0{,}586}$ | $a = 7{,}5\sqrt{3{,}414}$

$c = 15 \times 0{,}76$ | $a = 7{,}5 \times 1{,}84$

$c = 11{,}4$ | $a = 13{,}8$

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL (fig. 5)

$c = R\sqrt{3}$

$a = \frac{R}{2}$

$c = 15 \times 1{,}732 = 25{,}98$

$a = 15 : 2 = 7{,}5$

HEXAGONE RÉGULIER (fig. 6)

$c = R$

$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$c = 15$

$a = \frac{15 \times 1{,}732}{2} = 12{,}99$

DODÉCAGONE RÉGULIER (fig. 7)

$c = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$a = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$c = 15\sqrt{2 - 1{,}732}$ | $a = \frac{15}{2}\sqrt{2 + 1{,}732}$

$c = 15\sqrt{0{,}268}$ | $a = 7{,}5\sqrt{3{,}732}$

$c = 15 \times 0{,}52$ | $a = 7{,}5 \times 1{,}93$

$c = 7{,}8$ | $a = 14{,}5$

PENTAGONE RÉGULIER (fig. 8)

$c = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$a = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$c = \frac{15}{2}\sqrt{10 - 4{,}47}$

$c = 7{,}5\sqrt{5{,}53} = 7{,}5 \times 2{,}35 = 17{,}62$

$a = \frac{15 \times 3{,}24}{4} = 12{,}15$

DÉCAGONE RÉGULIER (fig. 9)

$c = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

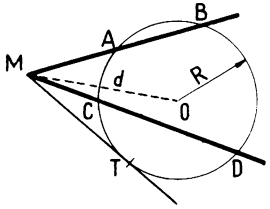
$a = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$c = \frac{15}{2} \times 1{,}24 = 9{,}30$

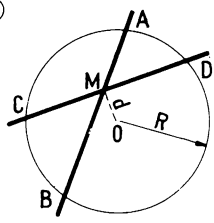
$a = \frac{15}{4}\sqrt{10 + 4{,}47}$

$a = \frac{15 \times 3{,}80}{4} = 14{,}25$

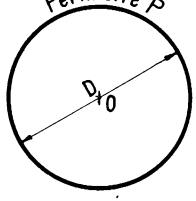
①



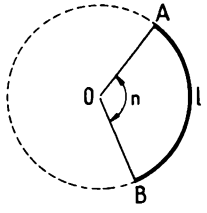
②



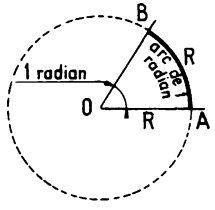
③



④



⑤



RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE

Théorème.

Si, par un point M, on mène deux cordes quelconques MAB et MCD, on a :

$$MA \times MB = MC \times MD.$$

Et réciproquement.

Deux cas de figure :

Fig. 1. **M extérieur au cercle** : $MA \times MB = d^2 - R^2$.

Le théorème s'applique aussi à la tangente MT :

$$MA \times MB = MT^2.$$

Fig. 2. **M intérieur au cercle** : $MA \times MB = R^2 - d^2$.

Puissance d'un point M par rapport à un cercle (fig. 1 et 2) : puissance $= d^2 - R^2$

- M extérieur : puissance positive,
- M intérieur : puissance négative,
- M sur le cercle : puissance nulle.

PÉRIMÈTRE DU CERCLE

Le périmètre d'un cercle est la limite vers laquelle tend la suite des périmètres des polygones réguliers convexes inscrits quand on double indéfiniment le nombre des côtés.

On démontre que :

Le **rapport** du périmètre d'un cercle à son diamètre est **constant,** quel que soit le cercle considéré.

En posant : $\frac{P}{D} = \pi$, on obtient :

$$\mathbf{P = \pi D} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P = 2\pi R}$$

($\pi = 3{,}141\,59\ldots \approx 3{,}1416$ et $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$).

Longueur d'un arc de cercle (fig. 4).

Les longueurs des arcs d'un même cercle sont **proportionnelles** aux angles au centre qui les interceptent. D'où :

$$L = \frac{2\pi Rn}{360} = \frac{\pi Rn}{180} \quad \text{(n en degrés)}$$

De même : $L = \frac{2\pi Rn}{400} = \frac{\pi Rn}{200}$ (n en grades)

RADIAN (*rd*)

1. **Arc dont la longueur est égale au rayon.**
2. **Angle au centre interceptant un arc égal au rayon.**

Un arc de 1 radian a pour longueur R (fig. 5),
Un arc de **n** radians a pour longueur Rn.

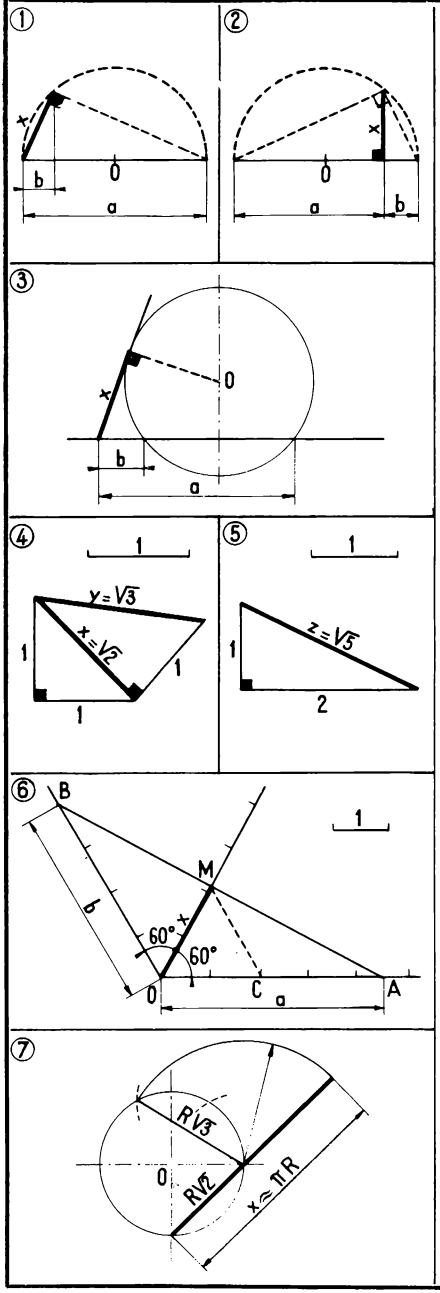
Formule $\mathbf{L = Rn.}$

La circonférence a pour longueur $R \times 2\pi$; c'est donc un arc de 2π radians. D'où :

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx \mathbf{57^\circ\ 17'\ 45''};$$

$$1 \text{ radian} = \frac{400 \text{ gr}}{2\pi} \approx \mathbf{63{,}666 \text{ gr}}.$$

CONSTRUCTIONS DE LONGUEURS



LONGUEURS DÉFINIES PAR DES FORMULES

I - Construction de $x = \sqrt{ab}$

(x est **moyenne proportionnelle** entre **a** et **b**).

1° Les constructions indiquées fig. 1 et 2 donnent un triangle rectangle dans lequel : $x^2 = ab$.

(Théorème de Pythagore M_1. 65).

D'où $x = \sqrt{ab}$

2° D'après les relations métriques dans **le cercle** (Ma 68), on a : $x^2 = ab$ (fig. 3). D'où $x = \sqrt{ab}$.

II - Construction de $x = \sqrt{2}$ $y = \sqrt{3}$ $z = \sqrt{5}$

L'unité de longueur étant choisie, on construit les triangles rectangles aux cotes indiquées sur les figures :

Fig. 4 : $x^2 = 1 + 1 = 2$; $x = \sqrt{2}$

$y^2 = 2 + 1 = 3$; $y = \sqrt{3}$

Fig. 5 : $z^2 = 4 + 1 = 5$; $z = \sqrt{5}$

III - Construction de x tel que

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

D'après la construction indiquée (fig. 6), le triangle OAM est équilatéral, car MC // OB. Donc :

$$\frac{MC}{OB} = \frac{CA}{OA} \quad \text{(tr. semblables)}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{a}$$

$$\frac{x}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

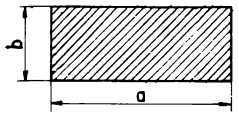
(voir autre présentation : M_1. 46).

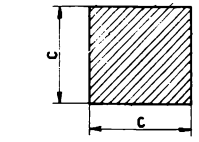
IV - Construction approchée de $x = \pi R$ ou rectification approchée d'une demi-circonférence.

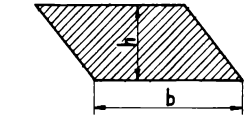
Additionner graphiquement le côté du carré inscrit et le côté du triangle équilatéral inscrit (fig. 7) :

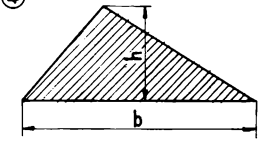
$$x = R\sqrt{2} + R\sqrt{3}$$
$$x = R(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$
$$x = R\ (1{,}414 + 1{,}732)$$
$$x = R \times 3{,}146$$
$$x \approx \mathbf{R} \times \pi.$$

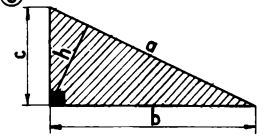
AIRES DES FIGURES PLANES (I)

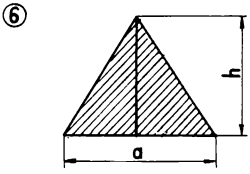
① 

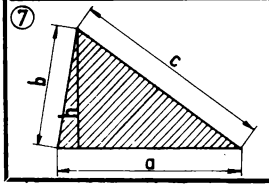
② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

⑦ 

RECTANGLE (fig. 1)

L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions :

$$S = a \times b.$$

Exemple : $a = 27\ mm$ et $b = 12\ mm$
$S = 27 \times 12 = \mathbf{324}\ mm^2$.

CARRÉ (fig. 2)

L'aire d'un carré est égale au carré du nombre qui mesure son côté :

$$S = c^2.$$

Exemple : $c = 15\ mm$ $S = 15^2 = \mathbf{225}\ mm^2$.

PARALLÉLOGRAMME (fig. 3)

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de l'un des côtés par la hauteur correspondante :

$$S = b \times h.$$

Exemple : $b = 28\ mm$ et $h = 15\ mm$
$S = 28 \times 15 = \mathbf{420}\ mm^2$.

TRIANGLE (fig. 4)

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de l'un des côtés par la hauteur correspondante :

$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

Exemple : $b = 36\ mm$ et $h = 17\ mm$

$$S = \frac{36 \times 17}{2} = \mathbf{306}\ mm^2.$$

TRIANGLE RECTANGLE (fig. 5)

Aire en fonction des deux côtés de l'angle droit **b** et **c** :

$$S = \frac{b \times c}{2}.$$

Exemple : $b = 30\ mm$ et $c = 26\ mm$

$$S = \frac{30 \times 26}{2} = \mathbf{390}\ mm^2.$$

Remarque importante.

$S = \frac{bc}{2}$ et $S = \frac{ah}{2}$. D'où $ah = bc$ et $h = \frac{\mathbf{bc}}{\mathbf{a}}$, relation qui permet de calculer **la hauteur relative à l'hypoténuse.**

Dans l'exemple précédent :

$a = \sqrt{30^2 + 26^2} = \sqrt{1\,576} = 39{,}70$. D'où $h = \frac{30 \times 26}{39{,}70} = \mathbf{19{,}64}\ mm$.

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL (fig. 6)

Aire en fonction du côté **a.**

Puisque $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, on a $S = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{a^2\sqrt{3}}}{4}$.

Exemple : $a = 22\ mm$

$$S = \frac{22^2 \times 1{,}732}{4} = \mathbf{209{,}57}\ mm^2$$

TRIANGLE QUELCONQUE (fig. 7)

Aire en fonction des trois côtés **a, b, c.**

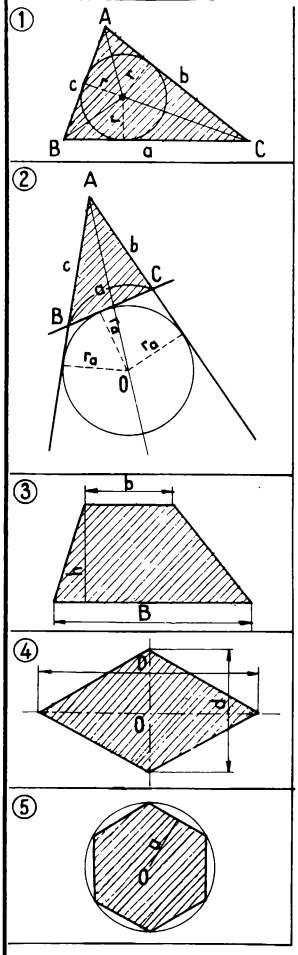
$$S = \frac{a}{2} \times h = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (M_1.\ 66)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(\text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

Exemple : $a = 25\ mm$ $b = 17\ mm$ $c = 28\ mm$ $(p = 35\ mm)$

$S = \sqrt{35 \times 10 \times 18 \times 7} = \sqrt{44\,100}$
$S = \mathbf{210}\ mm^2$.

M_1. 71 — AIRES DES FIGURES PLANES (2)



TRIANGLE QUELCONQUE (p : demi-périmètre).

Aire en fonction :

1° du rayon r du cercle inscrit (fig. 1)

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$S = \frac{(a + b + c)r}{2} = \frac{2pr}{2}$$

$$\mathbf{S = pr}$$

Application : calcul de r. (Ma. 70, fig. 7)

$p = 35$ et $S = 210$.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{210}{35} = \mathbf{6}\ mm.$$

2° des côtés et du rayon r_a d'un cercle ex-inscrit (fig. 2)

$$S = \frac{br_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{2}$$

$$S = \frac{(b + c - a)r_a}{2}$$

$$= \frac{(2p - 2a)r_a}{2}$$

$$\mathbf{S = (p - a)r_a}.$$

Application : calcul de r_a. (Ma. 70, fig. 7)

$(p - a) = 35 - 25 = 10$ et $S = 210$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{210}{10} = \mathbf{21}\ mm.$$

3° Du rayon R du cercle circonscrit

$$S = a \times \frac{h_a}{2} = a \times \frac{bc}{4R} = \frac{abc}{4R} \qquad (M_1.\ 66)$$

Application : calcul de R (Ma. 70, fig. 7).

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{25 \times 17 \times 28}{4 \times 210} = \mathbf{14{,}2}\ mm.$$

TRAPÈZE (fig. 3) — **L'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.**

$$\mathbf{S = \frac{B + b}{2} \times h}.$$

LOSANGE (fig. 4) — **L'aire d'un losange est égale au demi-produit de ses diagonales.**

$$\mathbf{S = \frac{D \times d}{2}}.$$

POLYGONE RÉGULIER CONVEXE (fig. 5) — **L'aire d'un polygone régulier convexe est égal au demi-produit de son périmètre par son apothème.**

$$\mathbf{S = \frac{p \times a}{2}}.$$

xemple : surface de l'hexagone de côté 5 *cm*.

$$p = 5 \times 6 = 30\ cm\ ;\quad a = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4{,}33\ cm;$$

$$S = \frac{30 \times 4{,}33}{2} = \mathbf{64{,}9}\ cm^2.$$

CERCLE

$$\mathbf{S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

Exemple : $R = 16\ cm$

$S = 3{,}14 \times 16^2 = 3{,}14 \times 256$

$S = \mathbf{803{,}84}\ cm^2$.

SECTEUR CIRCULAIRE

n degrés : $\mathbf{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$

n radians : $\mathbf{S = \frac{R^2 n}{2}}$

Exemple : $R = 16\ cm$, $n = 1{,}8\ rd$

$$S = \frac{16^2 \times 1{,}8}{2} = \mathbf{230{,}4}\ cm^2.$$

SEGMENT CIRCULAIRE
(rayons OA et OB ; arc AMB)

S = secteur OAMB — tr. OAB

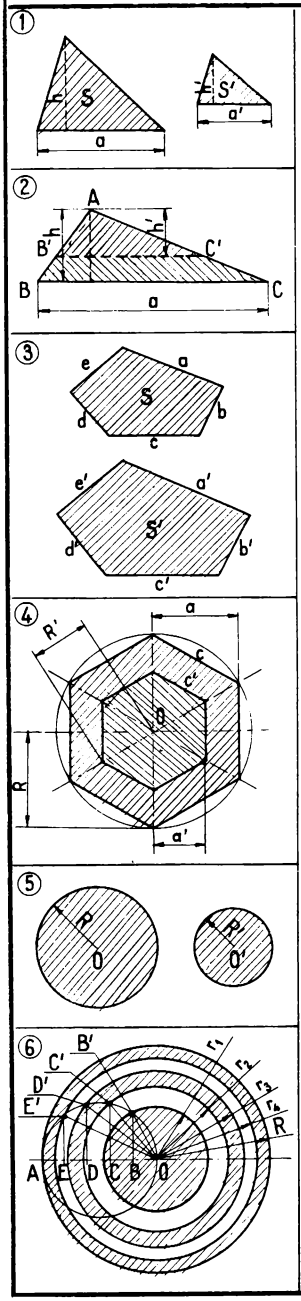
Exemple : $R = 16\ cm$;

$\widehat{AOB} = n = 120°$

$$S = \frac{3{,}14 \times 16^2}{3} - \frac{16\sqrt{3} \times 16}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= \mathbf{157{,}10}\ cm^2.$$

AIRES DES FIGURES SEMBLABLES



TRIANGLES SEMBLABLES (fig. 1)

Théorème.

Si deux triangles sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de similitude :

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \dots$$

Application (fig. 2).

Mener la droite B'C' parallèle au côté BC du triangle ABC et telle que l'aire du triangle AB'C' soit les 5/9 de la hauteur h = 16 *cm* du triangle ABC.

Soit h' la hauteur issue de A dans le triangle AB'C' :

$$\frac{\text{aire AB'C'}}{\text{aire ABC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

D'où $h' = h\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{h\sqrt{5}}{3} = \frac{16 \times 2,236}{3} = \mathbf{11,92}\ cm.$

POLYGONES SEMBLABLES (fig. 3)

Théorème.

Si deux polygones sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de similitude :

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 \dots$$

POLYGONES RÉGULIERS DE n CÔTÉS (fig. 4)

Ils sont semblables.

Donc :

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

Application.

Un hexagone régulier de côté **c** = 35 *cm* étant donné (fig. 4), calculer le côté **c'** de l'hexagone régulier ayant pour aire les 3/4 de celle du premier.

On a : $\left(\frac{c'}{c}\right)^2 = \frac{3}{4}$ d'où $\frac{c'}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$c' = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{35 \times 1,732}{2} = \mathbf{30,31}\ cm.$$

CERCLES (fig. 5)

Le rapport des aires de deux cercles est égal au carré du rapport de leurs rayons (ou de leurs diamètres).

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \left(\frac{D}{D'}\right)^2$$

Application.

Un cercle de 28 *cm* de rayon. Calculer le rayon du cercle dont l'aire est les 2/5 de celle du premier.

Soit **r** le rayon cherché : $\frac{S}{S'} = \left(\frac{r}{28}\right)^2 = \frac{2}{5} = 0,4$

D'où : $\frac{r}{28} = \sqrt{0,4}$

$$r = 28\sqrt{0,4} = 28 \times 0,632 = \mathbf{17,70}\ cm$$

Application graphique.

Partager un cercle de rayon R en 5 parties équivalentes, au moyen de circonférences concentriques (fig. 6).

Diviser le rayon OA en 5 parties égales et mener à OA les perpendiculaires. Elles coupent le cercle de diamètre OA aux points B, C, D, E.

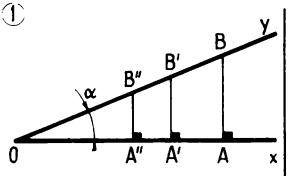
D'après Ma. 69 : $r_1^2 = OB'^2 = OA \times OB = R \times \frac{R}{5} = \frac{R^2}{5}$.

D'où $\pi . r_1^2 = \frac{\pi R^2}{5}$.

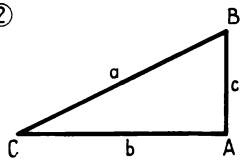
De même pour les autres rayons r_2, r_3, r_4.

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES AIGUS

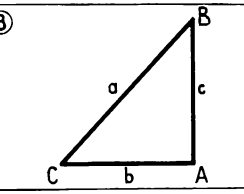
①



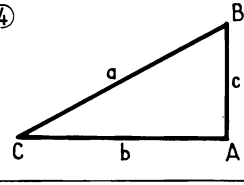
②



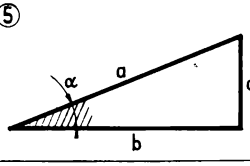
③



④



⑤



Sinus, cosinus, tangente d'un même angle α (fig. 5).

$$\sin\alpha = \frac{c}{a} \text{ et } \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

1° $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

2° $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \times \frac{a}{b}$

ou $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha}$$

SINUS d'un angle aigu (fig. 1).

De la similitude des triangles OAB, OA'B', OA"B"..., il résulte que :

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A''B''}{OB''} \cdots = C^{te}$$

Par définition, $\frac{AB}{OB}$ = sinus de l'angle $\alpha = \sin\alpha$

Dans un triangle rectangle : $\boxed{\text{sinus d'un angle aigu} = \frac{\text{côté opposé à cet angle}}{\text{hypoténuse}}}$

L'égalité $\frac{AB}{OB} = \sin\alpha$ s'écrit aussi : $AB = OB \times \sin\alpha$

Dans un triangle rectangle : **un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé à ce côté.**

(fig. 2) $b = a \sin \widehat{B}$ et $c = a \sin \widehat{C}$.

COSINUS d'un angle aigu (fig. 1).

De la similitude des triangles OAB, OA'B', OA"B"..., il résulte que :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA''}{OB''} \ldots = C^{te}$$

Par définition, $\frac{OA}{OB}$ = cosinus de l'angle $\alpha = \cos\alpha$

Dans un triangle rectangle : $\boxed{\text{cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{côté adjacent à cet angle}}{\text{hypoténuse}}}$

L'égalité $\frac{OA}{OB} = \cos\alpha$ s'écrit aussi : $OA = OB \times \cos\alpha$.

Dans un triangle rectangle : **un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent à ce côté.**

(fig. 3) $b = a \cos \widehat{C}$ et $c = a \cos \widehat{B}$.

TANGENTE d'un angle aigu (fig. 1).

De la similitude des triangles OAB, OA'B', OA"B"..., il résulte que :

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OB''} = \ldots C^{te}$$

Par définition, $\frac{AB}{OA}$ = tangente de l'angle $\alpha = \text{tg}\alpha$

Dans un triangle rectangle : $\boxed{\text{tangente d'un angle aigu} = \frac{\text{côté opposé à cet angle}}{\text{côté adjacent à cet angle}}}$

L'égalité $\frac{AB}{OA} = \text{tg}\alpha$ s'écrit aussi : $AB = OA \times \text{tg}\alpha$

Dans un triangle rectangle : **un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé au premier côté.**

(fig. 4) $b = c \text{ tg } \widehat{B}$ et $c = b \text{ tg } \widehat{C}$.

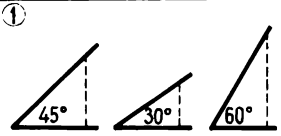
COTANGENTE d'un angle aigu (fig. 5).

Par définition, $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$. D'où $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha}$

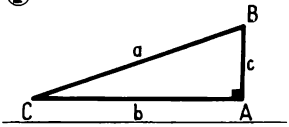
(La tangente et la cotangente d'un angle sont **inverses** l'une de l'autre.)

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

①



②



③ *Extrait de la table des sinus.*

	0′	10′	20′	30′
56°	0, 8290	0, 8307	0, 8323	0, 8339

$\Delta = 16$

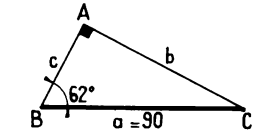
Interpolation.

sin 56°10′ 0,8307 $\Delta = 16$

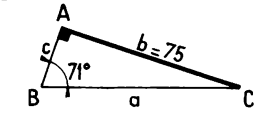
pour 7′ $\frac{16 \times 7}{10}$ 11

sin 56°17′ = 0,8318.

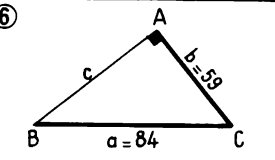
④



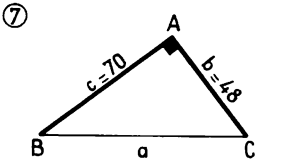
⑤



⑥



⑦



RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES USUELS

Angles	sin	cos	tg	cotg
45°	0,7071	0,7071	1	1
30°	0,5	0,8660	0,5774	1,7321
60°	0,8660	0,5	1,7321	0,5774

ANGLES COMPLÉMENTAIRES $\widehat{B}$ ET $\widehat{C}$ (fig. 2)

1° $\sin \widehat{B} = \frac{b}{a}$ et $\cos \widehat{C} = \frac{b}{a}$

Donc $\boxed{\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}}$

2° $\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c}$

et $\operatorname{cotg} \widehat{C} = 1 : \operatorname{tg} \widehat{C} = 1 : \frac{c}{b}$

$\operatorname{cotg} \widehat{C} = \frac{b}{c}$ $\boxed{\operatorname{tg} \widehat{B} = \operatorname{cotg} \widehat{C}}$

TABLES DE RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES (de 10′ en 10′). Lecture directe ou interpolation (DOC 29 à 32).

Exemple : sin 56°17′ = 0,8318.

Attention ! **Lorsqu'un angle augmente :**
son sinus et sa tangente **augmentent ;**
son cosinus et sa cotangente **diminuent.**

CALCULS RELATIFS AUX TRIANGLES RECTANGLES

1° Cas. Données : l'hypoténuse **a** et un angle aigu $\widehat{B}$.

$\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$
$b = a \sin \widehat{B}$
$c = a \cos \widehat{B}$

Fig. 4.

$\widehat{C} = 90° - 62° = \mathbf{28°}$
$b = 90 \sin 62°$
$= 90 \times 0{,}8830 = \mathbf{79{,}47}$
$c = 90 \cos 62°$
$= 90 \times 0{,}4695 = \mathbf{42{,}25}$

2e Cas. Données : un côté de l'angle droit **b** et l'angle aigu $\widehat{B}$.

$\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$
$a = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$
$c = b \operatorname{cotg} \widehat{B}$

Fig. 5.

$\widehat{C} = 90° - 71° = \mathbf{19°}$
$a = \frac{75}{\sin 71°} = \frac{75}{0\ 9455}$
$= \mathbf{79{,}32}$
$c = 75 \operatorname{cotg} 71°$
$c = 75 \times 0{,}3443 = \mathbf{25{,}82}$

3e Cas. Données : l'hypoténuse **a** et un côté de l'angle droit **b**.

$\sin \widehat{B} = \frac{b}{a}$; $\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$
$c = a \sin \widehat{C}$

Fig. 6.

$\sin \widehat{B} = \frac{59}{84} = 0{,}7024$
$\widehat{B} = \mathbf{44°37'}$
$\widehat{C} = 90° - 44°37' = \mathbf{45°23'}$
$c = 84 \sin 45°23'$
$= 84 \times 0{,}7118 = \mathbf{59{,}79}$

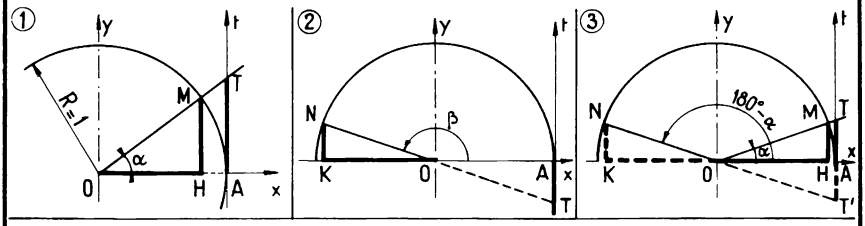
4e Cas. Données : les deux côtés de l'angle droit **b** et **c**.

$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c}$
$\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$
$a = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$

Fig. 7.

$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{48}{70} = 0{,}6857$
$\widehat{B} = \mathbf{34°26'}$
$\widehat{C} = 90° - 34°26' = \mathbf{55°34'}$
$a = \frac{48}{\sin 34°26'} = \frac{48}{0{,}5654}$
$= \mathbf{84{,}89}.$

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES DE 0° A 180°



Cercle trigonométrique (fig. 1). R = 1. Axes Ox, Oy, At. D'après Ma. 73 :

Angle aigu $\widehat{AOM} = \alpha$ (fig. 1).
$\sin \alpha = \overline{HM}$, $\cos \alpha = \overline{OH}$, $\operatorname{tg} \alpha = \overline{AT}$.

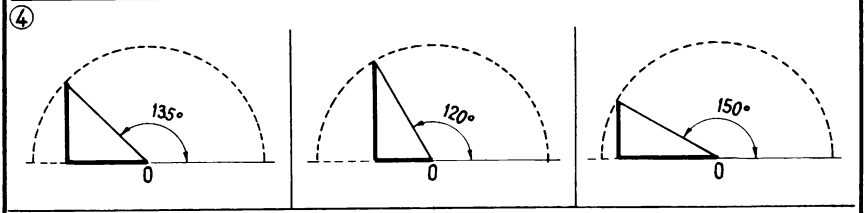
Angle obtus $\widehat{AON} = \beta$ (fig. 2). Par définition : $\sin \beta = \overline{KN}$ (positif), $\cos \beta = \overline{OK}$ (négatif), $\operatorname{tg} \beta = \overline{AT}$ (négative).

Sinus, cosinus et tangente de deux angles supplémentaires (fig. 3) : angles α et $180^\circ - \alpha$.

Les côtés OM et ON sont **symétriques** par rapport à Oy. D'où :

$$\begin{cases} \overline{KN} = \overline{HM} & \text{ou } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \overline{OK} = -\overline{OH} & \text{ou } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \overline{AT'} = -\overline{AT} & \text{ou } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



Rapports trigonométriques des angles de 135°, 120° et 150° (fig. 4). Voir Ma. 74.

Angles	sin	cos	tg	cotg
135°	0,7071	— 0,7071	— 1	— 1
120°	0,8660	— 0,5	— 1,7321	— 0,5774
150°	0,5	— 0,8660	— 0,5774	— 1,7321

Usage des tables.

Exemple 1 : Calcul de cos 132° 10′.

$180^\circ - 132^\circ\ 10' = 47^\circ\ 50'$

$\cos 132^\circ\ 10' = -\cos 47^\circ\ 50' = -0{,}6713.$

Exemple 2 : Calcul de l'angle obtus x ayant pour sinus 0,56.

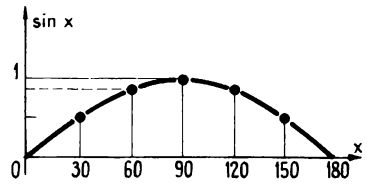
L'angle aigu qui a pour sinus 0,56 est l'angle de 34° 3′.

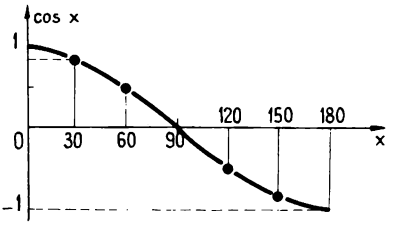
D'où $x = 180^\circ - 34^\circ\ 3' = 145^\circ\ 57'$.

VARIATION DU SINUS ET DU COSINUS D'UN ANGLE x POUR $0 < x < 180^\circ$

⑤ x	0°	↗	90°	↘	180°
sin x	0	↗	1	↘	0

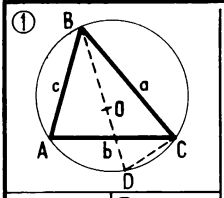
⑥ x	0°	↘	90°	↘	180°
cos x	1	↘	0	↘	-1

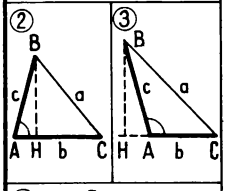


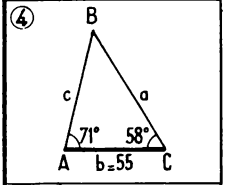


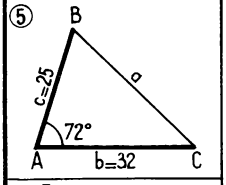
RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

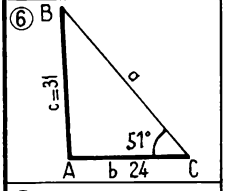
M_1. 76

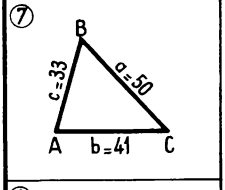


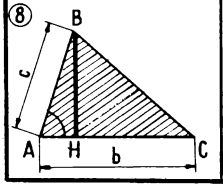












Théorème I (fig. 1).
Dans un triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \qquad (= 2R)$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Théorème II (fig. 2 et 3).
Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle compris.

(2 cas de figure selon que $\widehat{A}$ est aigu ou obtus)

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\widehat{A} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos\widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\widehat{C} \end{cases}$$

APPLICATIONS

Fig. 4
Données : b, $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$

$\widehat{B} = 180^0 - (71^0 + 58^0) = 51^0$;

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$. D'où $a = \dfrac{b \sin A}{\sin B} = \dfrac{55 \times 0{,}9455}{0{,}7771} = \mathbf{66{,}9}$

$\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$. D'où $c = \dfrac{b \sin C}{\sin B} = \dfrac{55 \times 0{,}8481}{0{,}7771} = \mathbf{60{,}0}$

Fig. 5
Données : b, c et $\widehat{A}$
($\widehat{A}$ angle compris entre les côtés)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

$a = \sqrt{32^2 + 25^2 - 2 \times 32 \times 25 \times 0{,}3090} = \mathbf{34}.$

$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$.

D'où $\sin\widehat{B} = \dfrac{b \sin A}{a} = \dfrac{32 \times 0{,}9511}{34} = 0{,}8951$

$\widehat{B} = \mathbf{63^0 31'}$ et $\widehat{C} = 180^0 - (72^0 + 63^0 31') = \mathbf{44^0 29'}$

Fig. 6
Données : b, c et $\widehat{C}$
($\widehat{C}$, angle opposé à l'un des côtés)

$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

D'où $\sin\widehat{B} = \dfrac{b \sin C}{c} = \dfrac{24 \times 0{,}7771}{31} = 0{,}6016$

$\widehat{B_1} = \mathbf{36^0 59'}$ ou $\widehat{B_2} = 143^0 1'$

Et $\begin{cases} A_1 = 180^0 - (51^0 + 36^0 59') = \mathbf{92^0 1'} \\ A_2 = 180^0 - (51^0 + 143^0 1'). \text{ Impossible.} \end{cases}$

Dans ce cas, une seule solution.

$\dfrac{a}{\sin A_1} = \dfrac{c}{\sin C}$. D'où $a = \dfrac{c \sin A_1}{\sin C} = \dfrac{31 \times 0{,}9993}{0{,}7771}$

$a = \mathbf{39{,}8}.$

Fig. 7
Données : a, b et c

$\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{1\,681 + 1\,089 - 2\,500}{2 \times 41 \times 33} = 0{,}0998$

$\widehat{A} = \mathbf{84^0 16'}$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1\,089 + 2\,500 - 1\,681}{2 \times 50 \times 33} = 0{,}5782$

$\widehat{B} = \mathbf{54^0 40'}$

$\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{2\,500 + 1\,681 - 1\,089}{2 \times 41 \times 50} = 0{,}7541$

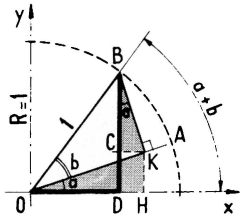
$\widehat{C} = \mathbf{41^0 4'}$

Aire du triangle (fig. 8).
L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris entre ces côtés.

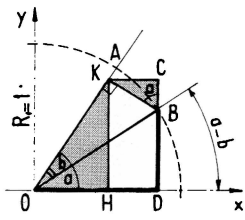
$$S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{AC \times AB \sin\widehat{A}}{2}$$

ou $\quad \mathbf{S = \dfrac{bc \sin\widehat{A}}{2}}$

FORMULES DE TRANSFORMATION

① 

$\sin(a+b)=\overline{DB}$
$\cos(a+b)=\overline{OD}$

② 

$\sin(a-b)=\overline{DB}$
$\cos(a-b)=\overline{OD}$

FORMULES D'ADDITION

(Démonstration dans le cas des fig. 1 et 2. Généralisation dans les autres cas ou Cf. M_2. 43).

Fig. 1

1° $DB = HK + CB = OK \sin a + BK \cos a$
$= (1 \times \cos b) \sin a + (1 \times \sin b) \cos a$
$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ (1)

2° $OD = OH - CK = OK \cos a - BK \sin a$
$= (1 \times \cos b) \cos a - (1 \times \sin b) \sin a$
$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (2)

3° Par division membre à membre de (1) par (2) :

$$\frac{\sin (a + b)}{\cos (a + b)} = \operatorname{tg} (a + b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

ou en simplifiant par cos a cos b :

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad (5)$$

Fig. 2

4° $DB = HK - CB = OK \sin a - BK \cos a$
$= (1 \times \cos b) \sin a - (1 \times \sin b) \cos a$
$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ (3)

5° $OD = OH + KC = OK \cos a + BK \sin a$
$= (1 \times \cos b) \cos a + (1 \times \sin b) \sin a$
$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (4)

6° De même, par division de (3) par (4) :

$$\frac{\sin (a - b)}{\cos (a - b)} = \operatorname{tg} (a - b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

$$\operatorname{tg} (a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

CALCUL DE sin 2 a, cos 2 a, tg 2 a

De l'égalité (1), avec b = a :
$\sin (a + a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

De l'égalité (2) avec b = a :
$\cos (a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
ou **$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$**,
ou **$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$**

De l'égalité (5), avec b = a :

$$\operatorname{tg} (a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

CALCUL DE sin p ± sin q et cos p ± cos q

$$\begin{cases} p = a + b \\ q = a - b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \dfrac{p + q}{2} \\ b = \dfrac{p - q}{2} \end{cases}$$

Par ***addition*** de (1) et (3) :
$\sin (a + b) + \sin (a - b) = 2 \sin a \cos b$
ou

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

Par ***addition*** de (2) et (4) :
$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$
ou

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

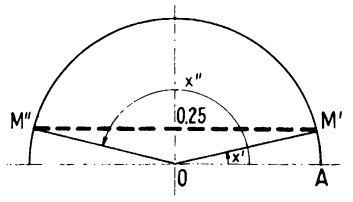
Par ***soustraction*** de (1) et (3) :
$\sin (a + b) - \sin (a - b) = 2 \sin b \cos a$
ou

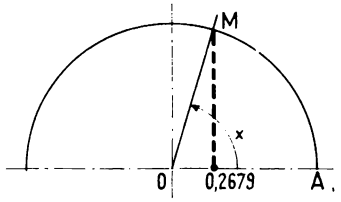
$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

Par ***soustraction*** de (2) et (4) :
$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \sin a \sin b$
ou

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES SIMPLES[1]

① 

② 

AVEC UN SEUL RAPPORT TRIGONOMÉTRIQUE

(Dans l'équation prendre ce rapport pour inconnue.)

Exemple 1 :

4 sin x — 1 = 0.

$\sin x = 1/4 = 0{,}25.$

D'où les deux solutions (fig. 1) :

$\widehat{AOM'} = x' = 14^o\,29'$ et $\widehat{AOM''} = x'' = 165^o\,31'$

Exemple 2 :

4 tg x — 3 = 0.

$\operatorname{tg} x = 3/4 = 0{,}75.$

D'où la solution unique $x = 36^o\,52'$.

Exemple 3 :

$\cos^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.

Cette équation du 2e degré a deux racines car $\Delta = 4^2 - 4 = 12 > 0$.

D'où :

$$\cos x = 2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} 2 + 1{,}732\,1 = 3{,}732\,1 \\ 2 - 1{,}732\,1 = 0{,}267\,9 \end{cases}$$

Seule la racine < 1 est cos d'un angle :

$\widehat{AOM} = x = 74^o\,27'$ (fig. 2).

II. AVEC SIN X ET COS X AU 1er DEGRÉ

(équation linéaire).

Exemple :

$5 \sin x + 3 \cos x = 2$.

$$\sin x + \frac{3}{5}\cos x = \frac{2}{5}$$

$$\sin x + 0{,}6 \cos x = 0{,}4 \qquad (1).$$

Déterminons l'angle aigu φ tel que $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}6$. Nous obtenons $\varphi = 30^o\,58'$. L'équation s'écrit alors :

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = 0{,}4$$

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\cos x = 0.4$$

$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = 0{,}4 \cos \varphi$ ou d'après (Ma. 77) :

$\sin (x + \varphi) = 0{,}4 \cos \varphi = 0{,}4 \cos 30^o\,58'$

$\sin (x + \varphi) = 0{,}4 \times 0{,}8575 = 0{,}3430.$

D'où deux solutions :

$$\begin{cases} x' + \varphi = 20^o\,4' \\ x'' + \varphi = 180^o - 20^o\,4' = 159^o\,56'. \end{cases}$$

La seule solution acceptable est x'' :

$x'' + 30^o\,58' = 159^o\,56'$

$x'' = 128^o\,58'$.

III. AVEC SIN X ET COS X AU 2e DEGRÉ

(équation quadratique).

Exemple :

$2 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$.

Divisons par $\cos^2 x$ les deux membres :

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1 = \frac{3}{\cos^2 x} \qquad (1)$$

Or $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

et $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{(Ma. 73)}$$

Remplaçons $\dfrac{3}{\cos^2 x}$ par son égal $3(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

L'équation (1) devient :

$2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1 = 3 + 3 \operatorname{tg}^2 x$

ou $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 2 = 0$

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{4 - 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$= \begin{cases} 2 + 1{,}414\,2 = 3{,}414\,2 \\ 2 - 1{,}414\,2 = 0{,}585\,8 \end{cases}$$

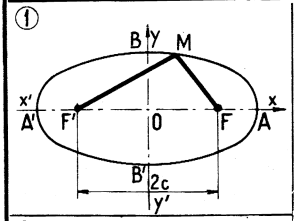
Deux solutions :

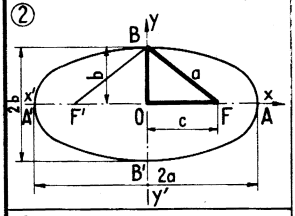
A $\operatorname{tg} x' = 3{,}414\,2$ correspond $x' = 73^o\,40'$

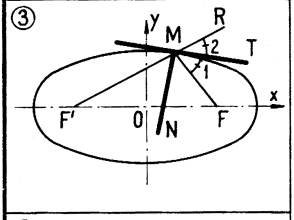
A $\operatorname{tg} x'' = 0{,}585\,8$ correspond $x'' = 30^o\,22'$

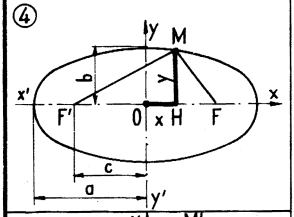
(1) On ne cherchera ici que les angles compris entre 0 et 180°.

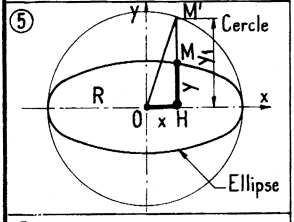
ELLIPSE

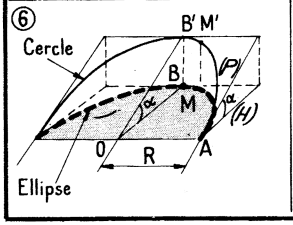












DÉFINITION

L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Fig. 1 : Points fixes F et F' **(foyers)**

Distance F'F = 2 c **(distance focale)**

MF et MF' : **rayons vecteurs**

$MF + MF' = 2a$

Axes. Sommets. Centre (fig. 2).

Axes de symétrie x'x et y'y. Sommets A et A' ; B et B'. Centre de symétrie O.

Longueur des axes.

1° Puisque AF' + AF = AF' + A'F' = 2 a, l'axe A'A a pour longueur **2 a.**

2° Puisque BF = BF' et que BF + BF' = 2 a, on a : BF = a. Dans le triangle rectangle OBF :

$$b^2 = a^2 - c^2; \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

L'axe B'B a pour longueur 2 b.

Tangente à l'ellipse (fig. 3). ***Théorème.***

La tangente à l'ellipse en l'un de ses points est bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs en ce point.

MT étant **tangente** à l'ellipse, on a : $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

MN⊥MT ; MN est **normale** à l'ellipse en M.

Calcul des rayons vecteurs MF et MF' (fig. 4) en fonction de **a** et **c** et de l'abscisse **x** du point M :

$$MF' = a + \frac{cx}{a} \qquad \text{et} \qquad MF = a - \frac{cx}{a}$$

Equation de l'ellipse (x et y, coordonnées de M).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$ (Cf. M_2. 74)

Cercle et ellipse.

Théorème (fig. 5). **L'ensemble des points obtenus en réduisant les ordonnées des points d'un cercle dans un même rapport est une ellipse.**

Si l'on pose $k = \frac{MH}{M'H}$, à **x** correspond une valeur de $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ (M' sur le cercle) et une valeur de

$$y = k\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Les points des coordonnées **x** et **y** sont sur une ellipse.

Théorème (fig. 6). **La projection d'un cercle sur un plan qui ne lui est pas parallèle est une ellipse.**

Un cercle tracé dans le plan (P) se projette sur le plan (H) selon une **ellipse.**

Demi-grand axe OA = R. Demi-petit axe OB = R cos α.

Aire de l'ellipse (axes 2a et 2b).

$$S = \pi ab.$$

Exemple : Calculer l'aire de l'ellipse qui a pour grand axe 32 *mm.* et pour distance focale 22 *mm.*

On a : $a = 16$ *mm.*

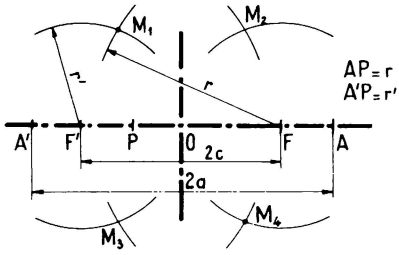
D'où : $b = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{135} = 11{,}62$ *mm*

$S = 3{,}14 \times 16 \times 11{,}62$

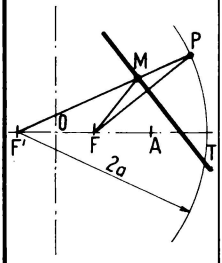
$S = \mathbf{583{,}79}$ *mm²*.

TRACÉS DE L'ELLIPSE

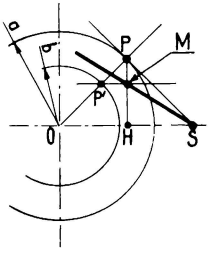
① Données : 2a et 2c



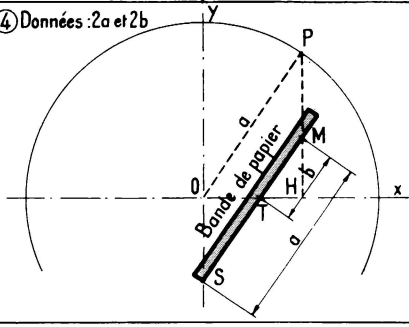
② Données : 2a et 2c



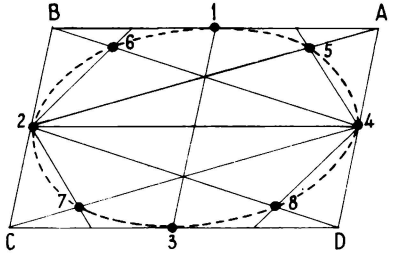
③ Données : 2a et 2b



④ Données : 2a et 2b



⑤



LES MÉTHODES DE TRACÉ

Reposent sur la **définition** de l'ellipse ou ses **propriétés** (Ma. 79).

D'après la définition (fig. 1) : P étant un point quelconque de F'F :

$M_1F + M_1F' = r + r' = AA' = 2a.$

On obtient ainsi **4 points M_1, M_2, M_3, M_4.**

D'après la propriété de la tangente à l'ellipse (fig. 2).

Tracer le cercle de centre F' et de rayon 2a et prendre un point quelconque P sur ce cercle.

Mener la médiatrice de FP et le rayon F'P, qui se coupent en M.

$MF + MF' = MF' + MP = F'P = 2a.$

On obtient ainsi **un point M** de l'ellipse et la **tangente MT** en ce point.

Réduction des ordonnées des points d'un cercle (fig. 3).

1° **Tracer les cercles de centres O et de rayons a et b.**

Prendre un point quelconque P sur le cercle (O,a). Mener par P et P' les parallèles aux axes : elles se coupent en M :

$$\frac{MH}{PH} = \frac{OP'}{OP} = \frac{b}{a} = C^{te}$$

On obtient ainsi **un point M** de l'ellipse d'axes 2a et 2b.

Remarque : PS tangente au cercle en P ; MS tangente à l'ellipse en M.

2° **Méthode dite « de la bande de papier »** (fig. 4).

Sur une bande de papier, marquer 3 points tels que :

$MS = a$ et $MT = b$.

Déplacer S sur Oy et T sur Ox. Le point P décrit le cercle (O,a) et :

$$\frac{MH}{PH} = \frac{MT}{OP} = \frac{b}{a}$$

Donc le point M **décrit une ellipse** ayant pour axes 2a et 2b.

Méthode dite des 8 points (fig. 5).

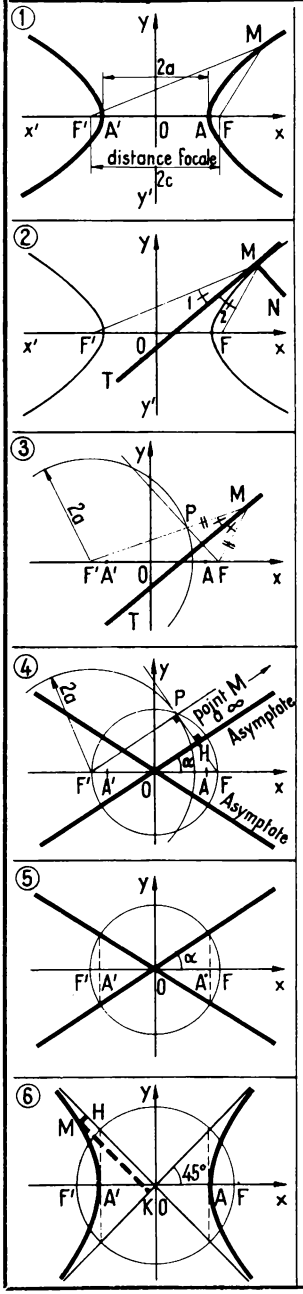
Cette méthode est employée en dessin pour trouver 8 points de l'ellipse inscrite dans un parallélogramme.

Quatre points 1-2-3-4, milieux des côtés.

Quatre points 5-6-7-8 obtenus en joignant, par exemple pour (5) :

} A à (2)
} et (4) au milieu de (A,1).

HYPERBOLE



DÉFINITION

L'hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante.

Fig. 1. Points fixes F et F′ **(foyers)**
Distance F′F = 2 c **(distance focale)**
MF et MF′ : **rayons vecteurs**

Deux branches : MF′ — MF = 2 a et MF — MF′ = 2 a.

Axes. Sommets. Centre (fig. 1).

Axes de symétrie x′x et y′y.

Puisque AF′ — AF = AF′ — A′F′ = 2 a, l'axe A′A a pour longueur 2 a. Centre de symétrie O.

Tangente à l'hyperbole (fig. 2). ***Théorème.***

La tangente à l'hyperbole en l'un de ses points est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs en ce point.

MT étant **tangente** à l'hyperbole, on a $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

MN ⊥ MT ; MN est **normale** à l'hyperbole en M.

Application : tracé de l'hyperbole par points et tangentes (fig. 3).

Tracer le cercle de centre F′ et de rayon 2 a et prendre un point quelconque P sur ce cercle.

Mener la médiatrice de FP et le rayon F′P, qui se coupent en M : MF′ — MF = MF′ — MP = F′P = 2 a.

On obtient ainsi **un point M** de l'hyperbole et **la tangente MT** en ce point.

Asymptotes à l'hyperbole.

Lorsque FP est tangent au cercle (F′, 2 a), le point M de l'hyperbole est à l'infini.

La médiatrice de FP passe par le centre O. Cette droite, qui est tangente à l'hyperbole, en un point infiniment éloigné, est dite **asymptote** à l'hyperbole. L'hyperbole a **deux** asymptotes.

Dans le triangle rectangle OFH :

$$OF = c \qquad OH = \frac{F'P}{2} = a \qquad HF = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$ (d'où la constr. simple des asymptotes, fig. 5).

Calcul des rayons vecteurs MF et MF′ en fonction de a et c et de l'abscisse x du point M :

$$MF' = \frac{cx}{a} + a \qquad MF = \frac{cx}{a} - a$$

Equation de l'hyperbole (x et y, coordonnées de M).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(en posant $b^2 = c^2 - a^2$) **(Cf. M_2. 74)**

Hyperbole équilatère. Hyperbole dont les asymptotes **sont perpendiculaires** (fig. 6). Puisque $\alpha = 45°$, on a :

$$\frac{a}{c} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{D'où : } \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad c^2 = 2a^2$$

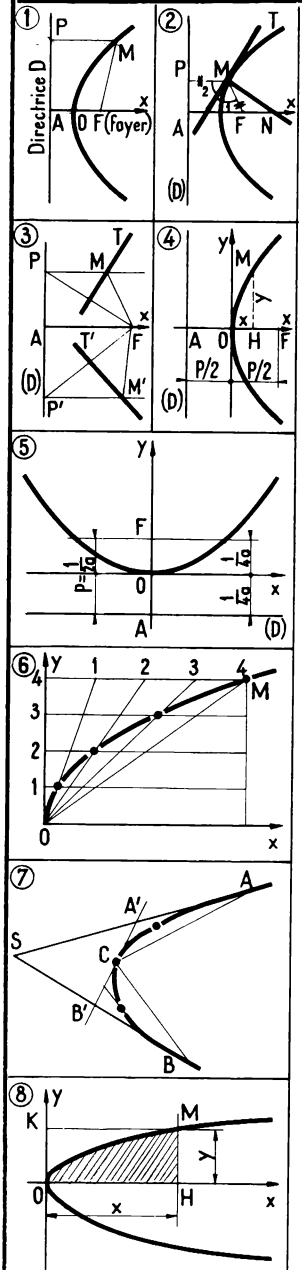
$$b^2 = c^2 - a^2 = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

L'équation s'écrit donc : $x^2 - y^2 = a^2$ (avec $c = a\sqrt{2}$).

(On démontre que cette hyperbole est le lieu géométrique des points dont le produit des distances à deux droites perpendiculaires est constant).

PARABOLE

M_1. 82



DÉFINITION

La parabole est le lieu géométrique des points équidistants d'une droite fixe et d'un point fixe.

Fig. 1. Droite fixe (D) **(directrice)** ; Point fixe F **(foyer)** ; MF : **rayon vecteur** } **MP = MF.**

Axe. Sommet (fig. 1).

Axe de symétrie FA ⊥ D. Puisque OA = OF, le sommet O de la parabole est au **milieu** de AF.

Tangente à la parabole (fig. 2).

Théorème. **La tangente à la parabole en l'un de ses points est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur en ce point et la perpendiculaire menée de ce point à la directrice.**

MT étant **tangente** à la parabole, on a : $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.
MN ⊥ MT ; MN est **normale** à la parabole en M.

Application : tracé de la parabole par points et tangentes (fig. 3).

Joindre le foyer F à un point quelconque P de la directrice. Mener la médiatrice de FP et, par P, la parallèle à l'axe qui se coupent en M.

On a MP ⊥ D et MF = MP. On obtient ainsi **un point M** de la parabole et la **tangente MT** en ce point.

Equation de la parabole (fig. 4).

x et y étant des coordonnées d'un point M de la parabole (Ox, axe de la parabole et Oy, tangente au sommet), l'équation de la parabole est (Cf. M_2. 73) :

$\boxed{y^2 = 2\,p\,x}$ (avec $AO = OF = \frac{p}{2}$; p : paramètre)

Foyer et directrice de la parabole $y = ax^2$ (M_1. 31).

Par comparaison avec : $x = \frac{y^2}{2p}$, on tire :

$\frac{1}{2p} = a$, ou $p = \frac{1}{2a}$, ou $\frac{p}{2} = \frac{1}{4a}$ (fig. 5)

Tracé de la parabole par points (fig. 6).

Connaissant le sommet O de la parabole et l'un de ses points M, le tracé indique comment on détermine d'autres points (**justification :** on démontre que $y^2/x = C^{te}$).

Raccordement de deux droites concourantes par un arc de parabole touchant ces droites en deux points donnés A et B (fig. 7).

On démontre que, SA et SB étant tangentes à la parabole en A et B :

1° la droite qui joint les milieux A′ et B′ de SA et SB est **tangente à la parabole ;**

2° le milieu C de A′B′ est **le point de contact de la parabole** et de la tangente.

Poursuivre la construction en appliquant la même propriété aux points C et A, puis C et B...

Aire d'un segment parabolique (fig. 8).

aire segment $OHM = \frac{2}{3}xy$; aire segment $OKM = \frac{1}{3}xy$

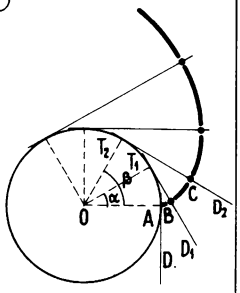
Exemple : Parabole $y^2 = 6x$. $x = 5\ mm$

$$y = \sqrt{6x} = \sqrt{30} = 5{,}477\ mm.$$

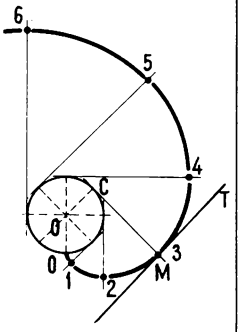
$$S\ (\text{segment OHM}) = \frac{2 \times 5 \times 5{,}477}{3} = 18{,}26\ mm^2.$$

DÉVELOPPANTE DE CERCLE - CYCLOÏDES

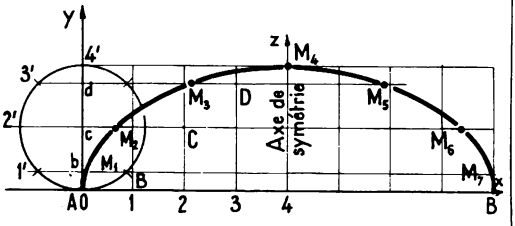
①



②



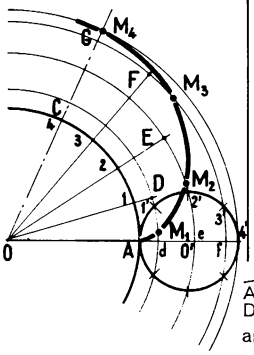
③



Détermination d'un point M_1 de la cycloïde.

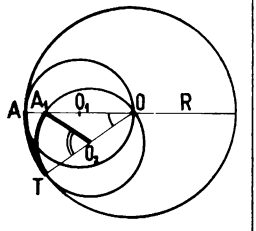
1° Diviser la base et le cercle en 8 parties égales.
2° Déterminer B, à l'intersection des parallèles à Oy et Ox menées par 1 et 1'.
3° Porter $BM_1 = b1'$.

④



OM_4 : axe de symétrie

⑤



$\widehat{AOT} = \alpha$ (rad) et $\widehat{AO_2T} = 2\alpha$ (rad)
D'où :
arc $\widehat{AT} = R\alpha$ et arc $\widehat{A_1T} = R\alpha$
Donc $\widehat{AT} = \widehat{A_1T}$.

DÉVELOPPANTE DE CERCLE

Courbe décrite par un point d'une droite lorsque celle-ci roule sans glisser sur un cercle.

Aux positions successives de de la droite : D, D_1, D_2 correspondent les points de la courbe : A, B ($T_1B = R\alpha$), C ($T_2C = R\beta$)...

Construction (fig. 2).

Diviser la circonférence en 8 parties égales et porter sur les tangentes, aux points de division, les longueurs :

$$\frac{\pi R}{4}, \frac{2\pi R}{4}, \frac{3\pi R}{4} \ldots$$

Au point M de la développante : — la **normale MC** est tangente au cercle ;

— la **tangente MT** est parallèle au rayon OC.

CYCLOÏDE

Courbe décrite par un point d'une circonférence lorsque celle-ci roule sans glisser sur une droite.

Lorsque le cercle générateur fait un tour, chacun de ses points décrit une arche de cycloïde (base AB = $2\pi R$).

Axe de symétrie : médiatrice de AB.

Construction (fig. 3).

Diviser la base AB et le cercle générateur en 8 parties égales.

Longueur d'une arche de cycloïde : **8R.**

Surface comprise entre une arche et sa base : $3\pi R^2$ (Cf. M_2. 109).

ÉPICYCLOÏDE-HYPOCYCLOÏDE

Courbe décrite par un point d'une circonférence lorsque celle-ci roule sans glisser sur une autre circonférence.

Si les circonférences sont tangentes extérieurement : **épicycloïde.**

Si elles sont tangentes intérieurement : **hypocycloïde.**

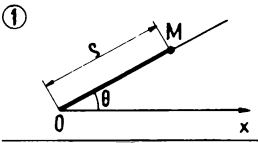
Construction analogue à celle de la cycloïde en remplaçant la base AB par l'arc 2AC de la circonférence O (fig. 4).

Cas particulier (fig. 5).

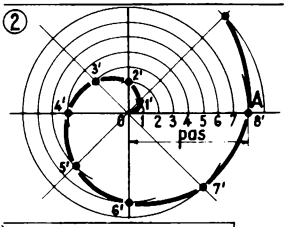
L'hypocycloïde obtenue en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double se réduit à une **droite, qui est un diamètre du grand cercle.**

Le point A du petit cercle décrit le diamètre OA du grand cercle, ce qui résulte de la démonstration de l'égalité $\widehat{AT} = \widehat{A_1T}$.

①

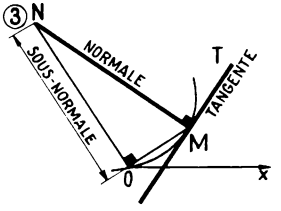


②

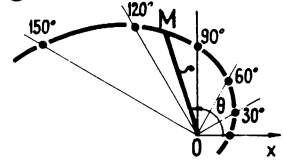


Rayons vecteurs ρ (*mm*)			
O1′	3	O5′	15
O2′	6	O6′	18
O3′	9	O7′	21
O4′	12	O8′	24

③

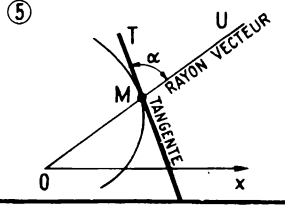


④



Rayons vecteurs (fig. 4)			
Angle en degrés	ρ *mm*	Angle en degrés	ρ *mm*
0	10	120°	42,9
30°	14,4	150°	61,8
60°	20,7	180°	89
90°	29,8		

⑤



Coordonnées polaires (fig. 1).

La relation : $\rho = f(\theta)$

est l'**équation en coordonnées polaires** (Cf. M_2. 79) de la courbe décrite par le point M quand l'angle θ varie.

O est le **pôle** ; θ **l'angle polaire** ; OM le **rayon vecteur.**

SPIRALE D'ARCHIMÈDE (fig. 2)

Courbe qui a pour équation :

$$\rho = L\theta$$

(L, longueur donnée, ou paramètre)

1° $\frac{\rho}{\theta} = L = C^{te}$: la spirale d'Archimède est le lieu géométrique des points M tels que la longueur OM est **proportionnelle** à l'angle θ.

2° Ou bien : la spirale d'Archimède est la courbe décrite par un point se déplaçant **uniformément** sur une droite animée elle-même d'un **mouvement uniforme** de rotation. Pour $\theta = 2\pi$ (1 tour), on a :

$$p = L \times 2\pi$$ (p : **pas de la spirale**)

Construction d'une spirale d'Archimède de pas donné p (**Exemple :** p = 24 *mm*).

Graphiquement. Partager le pas OA en 8 parties égales et l'angle de 360° en 8 parties égales ; d'où les points 1′, 2′... 8′ de la spirale.

Par le calcul de ρ (voir tableau ci-contre).

Tangente et normale en un point de la spirale d'Archimède (fig. 3).

Sous-normale ON = L (paramètre de la spirale).

D'où le tracé de la tangente en M à la spirale.

SPIRALE LOGARITHMIQUE (fig. 4)

Courbe qui a pour équation :

$$\rho = La^{\theta}$$

(L, longueur donnée, a > 1 et θ en radians)

Pour $\theta = 0$, $\rho = L \times a^0 = L \times 1 = L$.

Exemple (fig. 4). $\rho = 10 \times 2^{\theta}$.

Lorsque θ prend des valeurs croissant en **progression arithmétique,** ρ prend des valeurs croissant en **progression géométrique** : si θ **augmente** de α, le rayon ρ devient :

$$10 \times 2^{\theta+\alpha} = 10 \times 2^{\theta} \times 2^{\alpha} = \rho \times 2^{\alpha},$$

donc égal au **produit** de ρ par 2^{α}.

Construction résultant du calcul de ρ (fig. 4).

Lorsque l'angle θ augmente de 30° = 0,5236 rad, le rayon ρ est multiplié par $2^{0.5236}$, soit environ **1,44** (calcul logarithmique). D'où le tableau ci-contre.

Tangente en un point de la spirale logarithmique (fig. 5).

On démontre que l'angle α formé par la tangente à la spirale en un point et le rayon vecteur passant par ce point est **constant** (Cf. M_2. 80).

Pour $\rho = La^{\theta}$, on a $\operatorname{cotg} \alpha = La$ (La : log népérien de a)

Exemple. Calculer α **dans le cas de la spirale**

$$\rho = 10 \times 2^{\theta}$$

On a : $\operatorname{cotg} \alpha = L2$.

Calculons d'abord le logarithme décimal de 2 à l'aide de la table : log 2 = 0,301 03,

puis L2 d'après la relation : La = log a × 2,302.

$$L2 = 0{,}301\,03 \times 2{,}302 = 0{,}693$$

D'où $\operatorname{cotg} \alpha = 0{,}693$ et $\alpha \approx$ **55° 15′.**

V

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

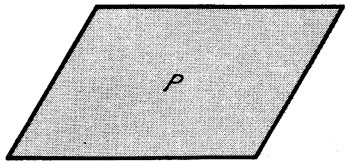
Chapitre 5

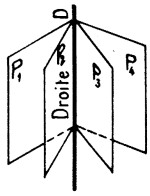
LE PLAN
PARALLÉLISME
PERPENDICULARITÉ
ANGLES DIÈDRES - ANGLES POLYÈDRES
PROJECTIONS ORTHOGONALES

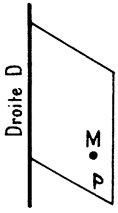
PRISME
PYRAMIDE - TRONC DE PYRAMIDE
CYLINDRE
CÔNE - TRONC DE CÔNE

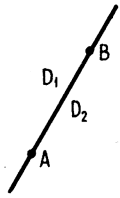
SPHÈRE
SOLIDES DE RÉVOLUTION
SECTIONS PLANES DES CYLINDRES ET DES CÔNES
HÉLICE

LE PLAN

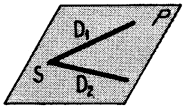
① 

② 

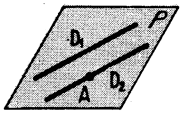
③ 

④ 

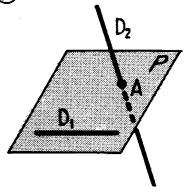
Droites confondues

⑤ 

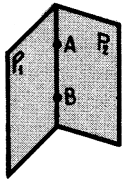
Droites sécantes

⑥ 

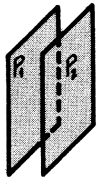
Droites parallèles

⑦ 

Droites non complanes

⑧ 

Plans sécants

⑨ 

Plans parallèles

PLAN

Surface illimitée telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points y est contenue tout entière :

Exemple : le plan P (fig. 1), représenté habituellement par un parallélogramme.

Plans passant par une droite D (fig. 2).

Par une droite, on peut faire passer une infinité de plans P_1, P_2, P_3, P_4...

Plan passant par une droite et un point non situé sur cette droite (fig. 3).

Par une droite D et un point M, non situé sur cette droite, on ne peut faire passer qu'un seul plan P.

Ce qui revient à dire que :

3 points non en ligne droite déterminent un plan, et un seul (droite joignant deux quelconques d'entre eux et le troisième point).

Propriétés du plan.

1° Un plan peut glisser sur lui-même.

2° Deux plans sont superposables.

Demi-plan : une droite d'un plan partage celui-ci en deux demi-plans.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES D_1 ET D_2

1° **Deux points communs A et B :** les droites sont confondues (fig. 4) ;

2° **Un seul point commun S :** les droites sont sécantes et elles déterminent un plan P (fig. 5) ;

3° **Aucun point commun.** Par l'une D_1 et un point A de l'autre, faisons passer un plan P.

a) Si P contient D_2, les droites D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 6) (on dit qu'elles déterminent le plan P).

b) Si P ne contient pas D_2, les droites D_1 et D_2 sont dites non complanes (fig. 7).

POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS P_1 ET P_2

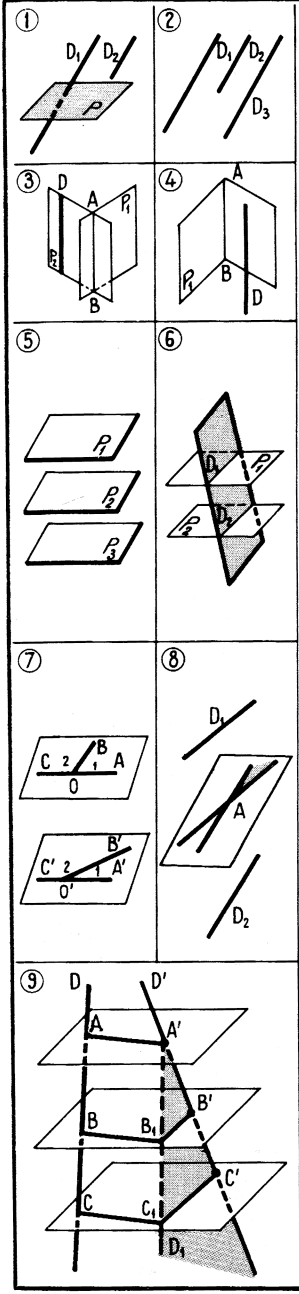
1° **Trois points communs** non en ligne droite : les plans coïncident.

2° **Deux points communs,** donc une droite commune : les plans P_1 et P_2 sont sécants (fig. 8).

3° **Un point commun** (donc une droite commune passant par ce point) ; les plans sont sécants.

4° **Aucun point commun :** les plans P_1 et P_2 sont parallèles (fig. 9).

PARALLÉLISME



DROITES PARALLÈLES

Théorèmes.

1° Par un point extérieur à une droite, on peut mener à cette droite une parallèle et une seule.

2° Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles et si un plan P coupe l'une, il coupe l'autre (fig. 1).

3° Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles à une même droite D_3, elles sont parallèles (fig. 2).

DROITES ET PLANS PARALLÈLES

Théorèmes.

1° Si, par un point extérieur à un plan, on mène la parallèle à une droite de ce plan, la droite et le plan n'ont aucun point commun (on dit qu'ils sont parallèles).

2° Si une droite D et un plan P_1 sont parallèles, tout plan P_2 passant par la droite et sécant au premier, coupe celui-ci selon une parallèle AB à la droite (fig. 3).

3° Si une droite D est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2, elle est parallèle à leur intersection AB (fig. 4).

PLANS PARALLÈLES

Théorèmes.

1° Si, par un point extérieur à un plan, on mène deux parallèles à ce plan, le plan déterminé par ces parallèles et le plan donné n'ont aucun point commun (on dit qu'ils sont parallèles).

2° Par un point extérieur à un plan, on peut mener à ce plan un plan parallèle et un seul.

3° Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles à un même plan P_3, ils sont parallèles (fig. 5).

4° Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 6).

ANGLE DE DEUX DROITES

Théorème (fig. 7).

Si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles :

1° s'ils sont tous deux aigus (ou tous deux obtus), ils sont égaux ; $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$ et $\widehat{O_2} = \widehat{O'_2}$;

2° si l'un est aigu et l'autre obtus, ils sont supplémentaires : $\widehat{O_1} + \widehat{O'_2} = 180^\circ$ et $\widehat{O_2} + \widehat{O'_1} = 180^\circ$.

Définitions.

1° L'angle de deux droites D_1 et D_2 est l'angle aigu formé par les parallèles menées, par un point quelconque A, à ces droites (fig. 8).

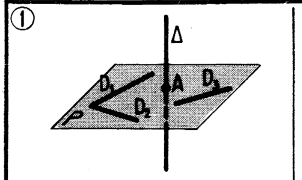
2° Deux droites dont l'angle est droit sont dites **orthogonales** ou, plus simplement, **perpendiculaires.**

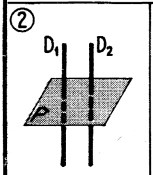
DROITES SÉCANTES A DES PLANS PARALLÈLES

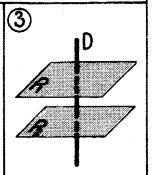
Généralisation du théorème de Thalès (M_1. 63) :

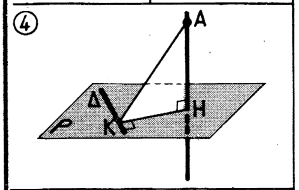
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$ (fig. 9).

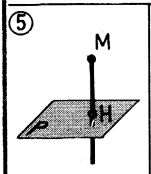
PERPENDICULARITÉ

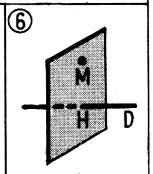


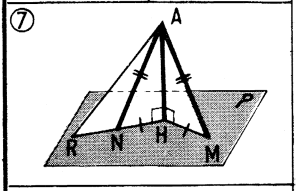


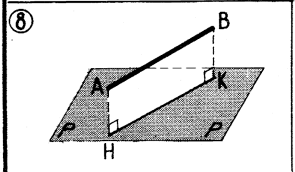


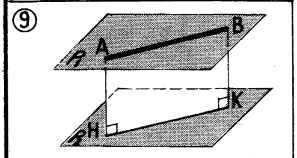












DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES (fig. 1)

Théorème.

Si une droite Δ est perpendiculaire à deux droites D_1 et D_2 concourantes d'un plan P, elle est perpendiculaire à une droite quelconque D_3 du plan.

On dit que la droite Δ est **perpendiculaire au plan P.**

Propriétés.

1° Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, tout plan P perpendiculaire à l'une est perp. à l'autre (fig. 2).

2° Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, toute droite D perpendiculaire à l'un est perp. à l'autre (fig. 3).

Théorème des trois perpendiculaires (fig. 4).

Si, par un point A extérieur à un plan, on mène la perpendiculaire AH à ce plan et si par H, on mène la perpendiculaire HK à une droite Δ du plan, la droite AK est perpendiculaire à la droite Δ du plan.

Donc, les conditions AH ⊥ P et HK ⊥ Δ entraînent **AK ⊥ Δ.** Ce théorème admet deux réciproques :

1° Si $\begin{cases} AH \perp P \\ AK \perp \Delta, \end{cases}$ on a : **HK ⊥ Δ.**

2° Si $\begin{cases} AK \perp \Delta \\ KH \perp \Delta \\ AH \perp KH, \end{cases}$ on a : **AH ⊥ P.**

Construction des droites et plans perpendiculaires.

1° Par un point M, on peut mener une droite perpendiculaire à un plan P et l'on n'en peut mener qu'une seule (fig. 5).

2° Par un point M, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite D et l'on n'en peut mener qu'un seul (fig. 6).

DISTANCES

Distance d'un point à un plan (fig. 7). ***Théorème.***

Si, par un point A, extérieur à un plan P, on mène à ce plan, la perpendiculaire et des obliques :

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique (AH < AM).

2° Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales (HM = HN entraîne AM = AN).

3° Deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales et celle qui s'en écarte le plus est la plus grande (HR > HM entraîne AR > AM).

Et réciproquement.

La longueur AH est la **distance** du point A au plan P.

Distance d'une droite et d'un plan parallèle (fig. 8). ***Théorème.***

Si une droite AB et un plan P sont parallèles, tous les points de la droite sont équidistants du plan (AH = BK).

La longueur AH s'appelle la distance de la droite AB au plan P.

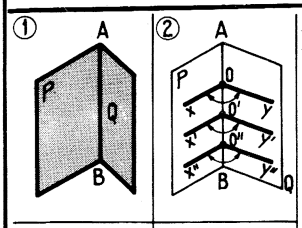
Distance de deux plans parallèles (fig. 9). ***Théorème.***

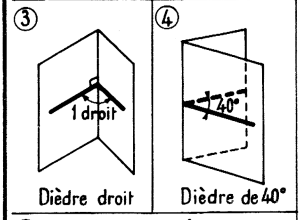
Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, tous les points de l'un sont équidistants de l'autre (AH = BK).

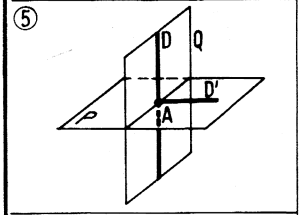
La longueur AH s'appelle la **distance** des deux plans.

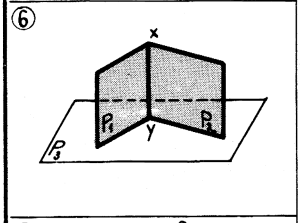
ANGLES DIÈDRES - ANGLES POLYÈDRES

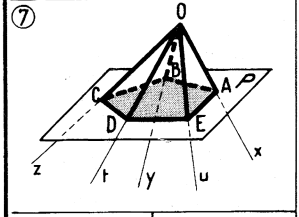
M_1. 88

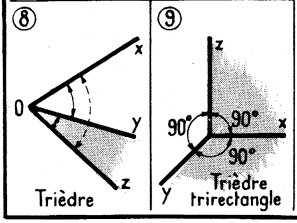












ANGLE DIÈDRE (fig. 1)

Figure formée par deux demi-plans passant par la même droite :

l'angle dièdre PABQ (pour simplifier, on dit « le dièdre »). Les plans P et Q sont ses **faces**, la droite AB son **arête.**

Angle plan d'un dièdre (fig. 2). ***Théorème.***

Si, par différents points de l'arête d'un dièdre, on mène dans chacune des faces les perpendiculaires à l'arête, tous les angles obtenus sont égaux.

L'angle $\widehat{xOy}$ s'appelle le **rectiligne du dièdre.**

Comparaison de deux dièdres.

Pour comparer deux dièdres, on compare leurs rectilignes. **Dièdre plat** (faces dans le prolongement l'une de l'autre) : **rectiligne plat.**

Dièdre droit (moitié d'un dièdre plat) : **rectiligne droit** (fig. 3).

En prenant pour unité de dièdre le dièdre droit et pour unité d'angle l'angle droit, la **mesure d'un dièdre est égale à celle de son rectiligne** (fig. 4).

PLANS PERPENDICULAIRES

Deux plans sont perpendiculaires si l'un des dièdres qu'ils forment est droit (fig. 5).

Les trois autres dièdres sont droits.

Théorème (fig. 5).

Si une droite D est perpendiculaire à un plan P, tout plan Q passant par la droite est perpendiculaire au plan P.

(On démontre que le rectiligne $\widehat{DAD'}$ est droit.)

Théorème (fig. 6).

Si deux plans sécants P_1 et P_2 sont perpendiculaires à un troisième P_3, leur intersection xy est perpendiculaire à ce troisième.

ANGLE POLYÈDRE (fig. 7)

Figure formée par plusieurs demi-droites issues d'un même point, non situées dans le même plan et prises dans un ordre déterminé.

Angle polyèdre Oxyztu.

Arêtes : Ox, Oy, Oz.... **Faces :** $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$... (ce sont des angles, chacun inférieur à 180°).

Polyèdre convexe : un plan P le coupe selon un polygone convexe (sinon, le polyèdre est concave).

ANGLE TRIÈDRE (fig. 8)

Angle polyèdre qui a trois faces.

Cas particulier : trièdre trirectangle ; les trois faces sont des angles droits (fig. 9).

Théorèmes.

1° Dans tout trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

Ainsi (fig. 8) : $\widehat{xOz} < \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$.

2° La somme des faces d'un trièdre est inférieure à quatre droits.

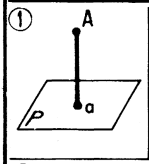
Ainsi (fig. 8) : $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOx} < 4$ droits.

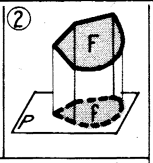
3° La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à quatre droits.

Ainsi (fig. 7) :

$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOt} + \widehat{tOu} + \widehat{uOx} < 4$ droits.

PROJECTIONS ORTHOGONALES

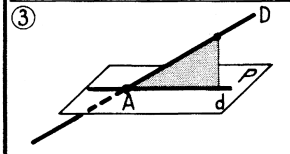




PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN

Projection d'un point (fig. 1) : pied de la perpendiculaire menée de ce point au plan. **a**, projection de A.

Projection d'une figure (fig. 2) : lieu géom. des projections des points de cette figure. **f**, projection de F.

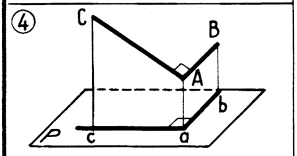


Projection d'une droite (fig. 3). ***Théorème.***

La **projection sur un plan d'une droite non perpendiculaire à ce plan est une droite.**

D a pour projection **d**.

Si D est perpendiculaire au plan P, sa projection se réduit à un point.



PROJECTION D'UN ANGLE DROIT (fig. 4)

Théorème.

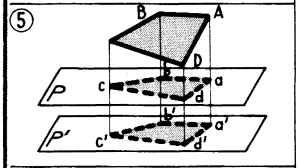
Si un angle droit a l'un de ses côtés, au moins, parallèle à un plan, sa projection sur ce plan est un angle droit.

$\widehat{BAC} = 90^o$ et AB // P entraînent $\widehat{bac} = 90^o$.

Réciproques.

1° Si un angle dont un côté est parallèle à un plan se projette selon un angle droit, cet angle est lui-même droit.

2° Si un angle droit se projette suivant un angle droit, un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.



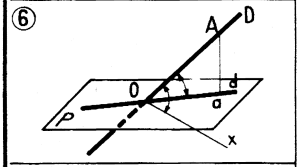
Projection d'une figure sur des plans parallèles.

Les projections d'une figure sur des plans parallèles sont des figures égales (fig. 5) : les projections abcd et a'b'c'd' de ABCD sur P et P' (plans parallèles) sont égales.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Théorème.

Etant donné un plan P et une droite D oblique à ce plan, de toutes les droites passant par le pied de D et situées dans le plan, la projection de D est celle qui fait avec la droite D le plus petit angle.



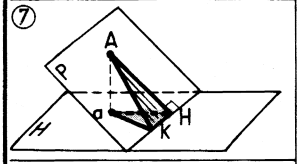
Ainsi (fig. 6) : $\widehat{AOa} < \widehat{AOx}$.

L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu formé par cette droite avec sa projection sur le plan.

Ligne de plus grande pente d'un plan (fig. 7) (par rapport à un plan horizontal, par exemple).

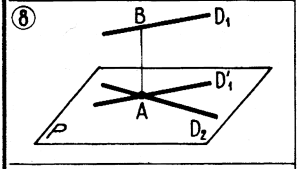
Théorème.

Etant donné un plan P et un plan horizontal H, de toutes les droites menées dans P par un point A de ce plan, la perpendiculaire à l'intersection des deux plans est celle qui fait avec le plan H le plus grand angle H.



Ainsi : $\widehat{AHa} > \widehat{AKa}$.

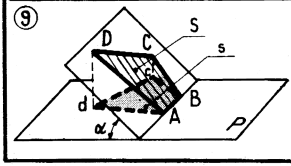
Une ligne de plus grande pente d'un plan P par rapport à un plan H est une droite du plan P perpendiculaire à l'intersection des deux plans.



Perpendiculaire commune à deux droites D_1 et D_2 (fig. 8).

Mener par D_2 le plan P // D_1. Projeter D_1 en D'_1 sur P.

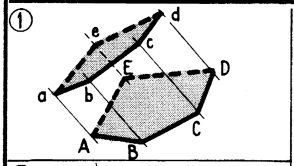
D_2 et D'_1 se coupent en A : AB perpendiculaire commune à D_1 et D_2 ; AB est le plus court des segments ayant leurs extrémités sur D_1 et D_2.

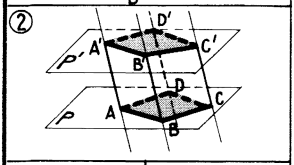


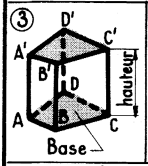
Projection d'une surface plane (fig. 9). ***Théorème.***

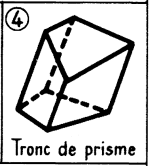
L'aire de la projection d'une surface plane sur un plan est égale au produit de l'aire de cette surface par le cosinus de l'angle aigu des deux plans. $s = S \times \cos \alpha$

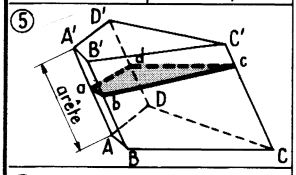
PRISME • PARALLÉLÉPIPÈDE

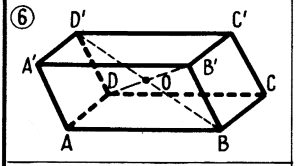


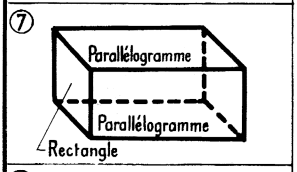


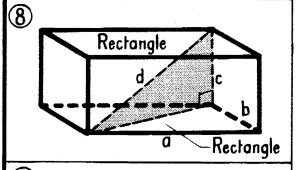


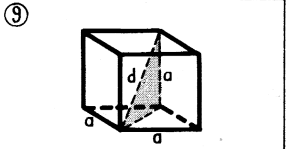












POLYÈDRE

Solide limité par des portions de plan.
Surface polyèdrique : ensemble des faces.

Surface prismatique.

Surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à elle-même en s'appuyant sur les côtés d'un polygone **ABCDE** (fig. 1).

Une section abcde par un plan perpendiculaire aux arêtes est dite **section droite.**

Théorème (fig. 2).

Les sections d'une surface prismatique par des plans parallèles rencontrant toutes les arêtes sont égales.

PRISME

Solide limité par une surface prismatique et 2 sections planes parallèles (fig. 2) : le prisme ABCDA'B'C'D'.

Ses bases ABCD et A'B'C'D' sont des polygones **égaux**; ses arêtes AA', BB', CC', DD' sont **égales**; ses faces latérales sont des parallélogrammes. Sa **hauteur** est la distance des deux bases.

Prisme droit (fig. 3) : déterminé par deux sections droites (il est **régulier** si ces sections sont des polygones réguliers).

Tronc de prisme (fig. 4) : solide limité par une surface prismatique et deux sections planes non parallèles.

Aire de la surface latérale d'un prisme (fig. 5).

L'aire de la surface latérale d'un prisme est égale au produit du périmètre de sa section droite par l'arête.

Les faces sont des parallélogrammes ayant même base (la longueur de l'arête du prisme) ; leurs hauteurs respectives sont les côtés ab, bc, cd, da, de la section droite.

D'où : **aire latérale** $=$ **(ab** $+$ **bc** $+$ **cd** $+$ **da)** $\times$ **AA'.**

Dans le cas du prisme droit (fig. 3), cette égalité devient : **aire latérale** $=$ **périmètre de base** $\times$ **hauteur.**

PARALLÉLÉPIPÈDE (fig. 6)

Prisme dont les bases sont des parallélogrammes.

1° Les arêtes sont parallèles et égales quatre à quatre.
2° Les faces opposées sont parallèles et égales.
3° Les diagonales concourent en un point O qui est le milieu de chacune d'elles **(centre du** parallélépipède).

Parallélépipède droit (fig. 7).

Ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Ses faces latérales sont des rectangles.

Parallélépipède rectangle (fig. 8) **:**
parallélépipède droit dont la base est un rectangle.

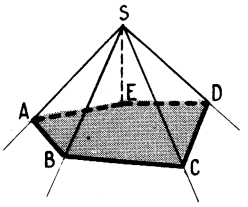
1° Ses 6 faces sont des rectangles égaux deux à deux.
2° Ses dièdres sont droits.
3° Les arêtes issues d'un même sommet forment un trièdre trirectangle.
4° Ses diagonales sont égales : $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Cube (fig. 9) : **parallélépipède rectangle dont toutes les arêtes sont égales.**

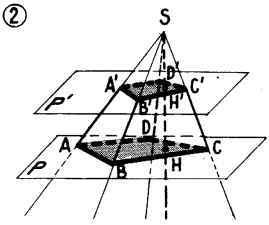
Les 6 faces sont des carrés ; d (du cube) $= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

PYRAMIDE

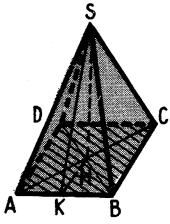
①



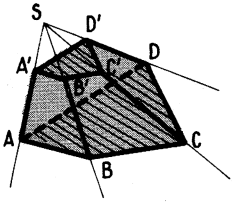
②



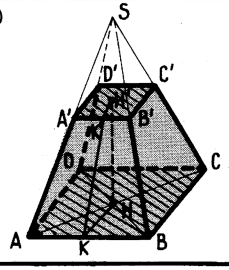
③



④



⑤



SURFACE PYRAMIDALE

Surface engendrée par une droite passant par un point fixe et se déplaçant en s'appuyant sur les côtés d'un polygone ABCDE (fig. 1).

Le point S est le **sommet** de la surface pyramidale.

Théorème (fig. 2).

Les sections d'une surface pyramidale par des plans parallèles sont des poiygones semblables.

Rapport de similitude $= \frac{A'B'}{AB} = \frac{SH'}{SH}$.

PYRAMIDE

Solide limité par une surface pyramidale et une section plane (fig. 1 : la pyramide SABCDE).

Base ABCDE ; **sommet** S ; **arêtes latérales** SA, SB...; **hauteur : perp. menée du sommet à la base.**

Pyramide régulière (fig. 3).

Une pyramide est régulière si :

1° **sa base est un polygone régulier;**

2° **le pied de sa hauteur est au centre de la base.**

Les arêtes latérales SA, SB... sont égales (obliques s'écartant également du pied H de la perpendiculaire);

Les faces latérales SAB, SBC sont des triangles isocèles égaux; leur hauteur SK est l'**apothème de la pyramide** : $SK^2 = SH^2 + HK^2$.

Aire de la surface latérale d'une pyramide régulière (fig. 3).

Les faces latérales étant des triangles égaux :

$$\text{Aire latérale} = \text{aire SAB} \times 4 = \frac{AB \times SK}{2} \times 4 = \frac{4AB \times SK}{2}$$

$$= \frac{\text{périmètre} \times \text{apothème}}{2}. \quad \text{D'où :}$$

l'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière est égale au demi-produit du périmètre de la base par l'apothème.

TRONC DE PYRAMIDE

Solide limité par une surface pyramidale et deux sections planes parallèles (fig. 4).

Les sections sont des polygones semblables (**bases** du tronc); leur distance est la **hauteur** du tronc de pyramide.

Tronc de pyramide régulier (fig. 5).

Un tronc de pyramide est régulier quand il est obtenu en coupant une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base.

Ses faces latérales sont des trapèzes égaux; leur hauteur KK' s'appelle l'**apothème** du tronc de pyramide :

$$KK'^2 = HH'^2 + (HK - H'K')^2.$$

Aire de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulier (fig. 5).

Les faces latérales étant des trapèzes égaux :

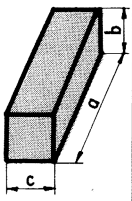
$$\text{Aire latérale} = \text{aire ABB'A'} \times 4 = \frac{AB + A'B'}{2} \times KK' \times 4$$

$$= \frac{(4AB + 4A'B') \times KK'}{2}. \quad \text{D'où :}$$

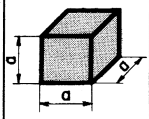
l'aire de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulier est égale au demi-produit de la somme des périmètres des bases par l'apothème.

PRISME ET PYRAMIDE
(VOLUME)

①



②



PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE (fig. 1). $\mathbf{V = abc}$

Son volume est égal au produit de ses trois dimensions.

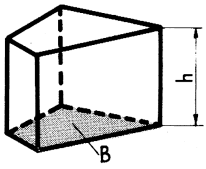
Exemple : a = 52 *cm*, b = 23 *cm*, c = 20 *cm* | $V = 52 \times 23 \times 20 = \mathbf{23\,920}\ cm^3$

CUBE (fig. 2). $\mathbf{V = a^3}$

Son volume est égal au cube du nombre qui mesure son arête.

Exemple : a = 11,2 *cm* | $V = 11{,}2 \times 11{,}2 \times 11{,}2 = \mathbf{1\,404{,}928}\ cm^3$

③



PRISME DROIT (fig. 3). $\mathbf{V = Bh}$

Son volume est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

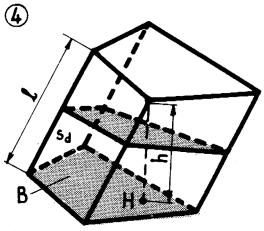
Exemple. Calculer le volume d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier de 30 *cm* de côté et dont la hauteur mesure 12 *cm*.

Apothème de l'hexagone (M_1. 67) $\dfrac{30 \times \sqrt{3}}{2} = 25{,}98\ cm$

Aire de l'hexagone (M_1. 71) $\dfrac{30 \times 6 \times 25{,}98}{2} = 2338{,}2\ cm^2$

Volume du prisme : $2338{,}2 \times 12 = \mathbf{28\,058{,}4}\ cm^3$.

④



PRISME OBLIQUE (fig. 4)

$\mathbf{V = s_d l}$ **ou** $\mathbf{V = Bh}$

Le volume d'un prisme oblique est égal au produit de l'aire de sa section droite par la longueur de son arête latérale,

ou au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Exemple (fig. 5). Calculer le volume d'un prisme oblique triangulaire sachant que :

1° sa base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 10 et 12 *cm* ;

2°. ses arêtes latérales font un angle de 60° avec le plan de base ;

3° son arête mesure 15 *cm*.

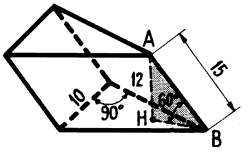
Aire de base : $\dfrac{10 \times 12}{2} = 60\ cm^2$

Dans le triangle rectangle AHB :

$$AH = \frac{15 \times \sqrt{3}}{2} = 12{,}99\ cm$$

Volume du prisme oblique $60 \times 12{,}99 = \mathbf{779{,}4}\ cm^3$.

⑤

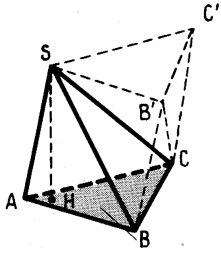


PYRAMIDE (fig. 6). $\mathbf{V = \dfrac{Bh}{3}}$

Par les sommets B et C, menons les parallèles à l'arête SA. Elles coupent le plan mené par S parallèlement à la base ABC en deux points B' et C' tels que le solide ABCSB'C' est un **prisme oblique.**

Ce prisme se décompose en trois pyramides : SABC, B'SBC et B'SCC'.

⑥



Or, on démontre que deux pyramides dont les bases ont la même aire et dont les hauteurs sont égales ont le même volume, d'où il résulte que les trois pyramides énoncées ci-dessus ont le même volume.

Donc : Vol. $SABC = \dfrac{\text{vol. prisme } ABCSB'C}{3} = \dfrac{\text{surf. } ABC \times SH}{3}$

D'où l'énoncé :

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

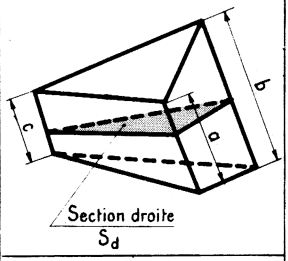
Exemple. Calculer le volume d'une pyramide dont la base est un carré de 15 *cm* de côté et dont la hauteur mesure 12 *cm*.

$$V = \frac{(15 \times 15) \times 12}{3} = \mathbf{900}\ cm^3$$

(Pour une démonstration algébrique des formules : Cf. M_2. 114.)

TRONC DE PRISME
TRONC DE PYRAMIDE *(VOLUME)*

①



TRONC DE PRISME TRIANGULAIRE (fig. 1)

Son volume est égal au produit de l'aire de sa section droite par la moyenne arithmétique des 3 arêtes latérales.

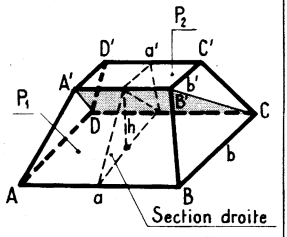
$$V = S_d \times \frac{a + b + c}{3}$$

Exemple :

$S_d = 46\ cm^2$
$a = 20\ cm$
$b = 18\ cm$
$c = 7\ cm$

$$V = 46 \times \frac{20 + 18 + 7}{3}$$
$$V = 46 \times 15$$
$$= \mathbf{690}\ cm^3.$$

②



TRONC DE PRISME QUELCONQUE

On calcule son volume en faisant la **somme** des volumes des troncs de prisme triangulaires qui le composent.

Exemple : tas de cailloux (fig. 2). Le plan passant par les droites A'B' et CD partage ce solide en deux troncs de prisme triangulaires P_1 et P_2.

$$\begin{cases} \text{vol. } P_1 = \dfrac{bh}{2}\left(\dfrac{a + a + a'}{3}\right) = \dfrac{bh}{6}(2a + a') \\ \text{vol. } P_2 = \dfrac{b'h}{2}\left(\dfrac{a' + a' + a}{3}\right) = \dfrac{b'h}{6}(2a' + a) \end{cases}$$

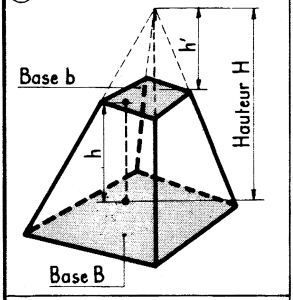
$$\text{vol. } P = \frac{h}{6}\left[b(2a + a') + b'(2a' + a)\right].$$

Exemple :

$a = 150\ cm$, $a' = 80\ cm$
$b = 124\ cm$, $b' = 30\ cm$
$h = 50\ cm$.

$$V = \frac{50}{6}\left[124(300 + 80) + 30(160 + 150)\right]$$
$$= \frac{50 \times 56\,420}{6} = \mathbf{470\,166}\ cm^3.$$

③



TRONC DE PYRAMIDE (fig. 3)

On calcule son volume V en faisant la différence des volumes de deux pyramides.

$$V = \frac{B \times H}{3} - \frac{b \times h'}{3} \quad \text{avec} \begin{cases} h = H - h' \\ \dfrac{B}{b} = \dfrac{H^2}{h'^2} \end{cases} \qquad (M_1.\ 72)$$

Calcul de H et h'
(en fonction de h)

$$\frac{H}{h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{H}{H - h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

De même :

$$h' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

Calcul de V

$$V = \frac{B}{3} \times \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b}{3} \times \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

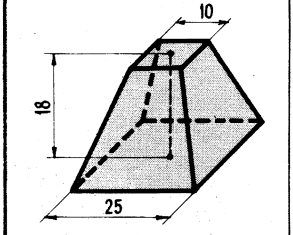
$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{B\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right]$$

$$V = \frac{h}{3} \times \frac{\sqrt{B^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

D'après M_1. 21 :

$$\boxed{V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})}$$

④

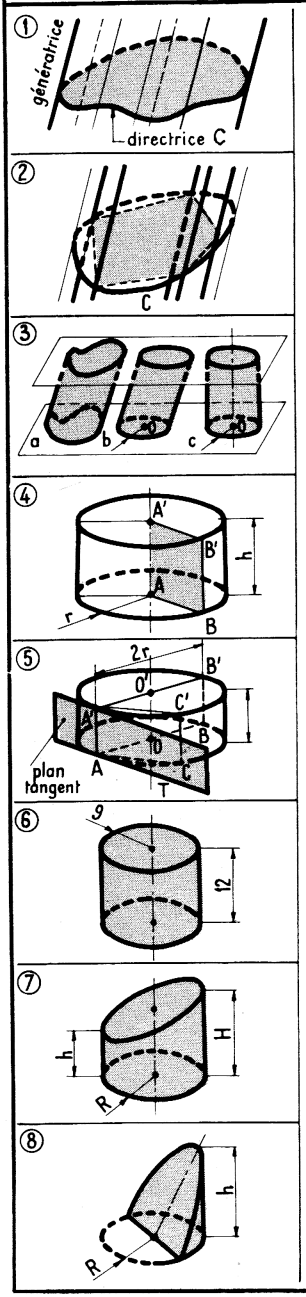


Exemple (fig. 4)
Bases carrées de côtés 25 et 10 *cm* ; hauteur 18 *cm*.

$$V = \frac{18}{3} \times \left(25^2 + 10^2 + \sqrt{25^2 \times 10^2}\right)$$
$$V = 6 \times (625 + 100 + 250)$$
$$V = 6 \times 975 = \mathbf{5\,850}\ cm^3.$$

CYLINDRE
(SURFACE ET VOLUME)

M_1. 94



SURFACE CYLINDRIQUE

Surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à elle-même en s'appuyant constamment sur le contour d'une courbe C (fig. 1).

Courbe C : **directrice**; droite mobile : **génératrice.**

Surface prismatique inscrite dans une surface cylindrique (fig. 2).

C'est une surface prismatique obtenue par le déplacement d'une droite parallèle à la génératrice et s'appuyant sur le périmètre d'un **polygone inscrit** dans la courbe C.

Les propriétés des surfaces prismatiques (Ma. 90) s'appliquent aux surfaces cylindriques. En particulier :

les sections d'une surface cylindrique par des plans parallèles coupant les génératrices sont égales.

CYLINDRE

Solide limité par une surface cylindrique et deux sections planes parallèles (Fig. 3) :

a) Cylindre oblique (les bases sont quelconques).

b) Cylindre circulaire oblique (les bases sont des cercles).

c) Cylindre circulaire droit (les bases sont des cercles), ou **cylindre de révolution** (fig. 4) engendré par la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés : le rectangle ABB'A' engendre un cylindre circulaire droit ayant pour **rayon de base** $r = AB$ et pour **hauteur** $h = BB'$. Le côté AA' est l'**axe du cylindre.**

Sections planes d'un cylindre.

1° Par un plan **perpendiculaire** à l'axe : ce sont des cercles.

2° Par un plan **passant par l'axe** (fig. 5) : ce sont des rectangles ayant pour dimensions 2r et h.

3° Par un plan contenant une génératrice AA' (fig. 5) : ce sont des rectangles (ACC'A'). Lorsque le plan sécant pivote autour de la génératrice AA', il peut devenir **tangent au cylindre** le long de cette génératrice.

Le plan tangent au cylindre le long de AA' (fig. 5) contient la génératrice AA' et la tangente AT en A au cercle de centre O.

4° Par un plan ni perpendiculaire, ni parallèle à l'axe : **ellipse** (Ma. 101).

Aire latérale du cylindre de révolution (limite vers laquelle tend l'aire latérale d'un prisme inscrit lorsque le nombre des côtés de la base augmente indéfiniment).

L'aire latérale d'un cylindre de révolution est égale au produit du périmètre de sa base par sa hauteur :

$$S = 2\pi Rh.$$

D'où : aire totale $= 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h)$.

Volume du cylindre de révolution (limite vers laquelle tend le volume d'un prisme inscrit lorsque le nombre des côtés de la base augmente indéfiniment).

Le volume d'un cylindre de révolution est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur :

$$V = \pi R^2 h.$$

Applications numériques (fig. 6) : $R = 12$ *cm*, $h = 9$ *cm*.

$S = 2 \times 3{,}14 \times 12 \times 9 = 678{,}24$ *cm²*

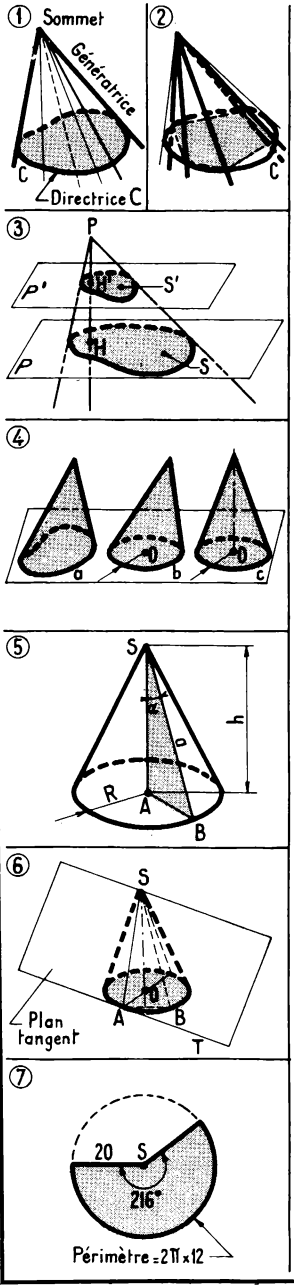
$V = 3{,}14 \times 12 \times 12 \times 9 = 4\,069{,}44$ *cm³*

Volume du cylindre tronqué (fig. 7)

$$V = \pi R^2 \times \left(\frac{H + h}{2}\right)$$

Volume de l'onglet cylindrique (fig. 8) $V = \frac{2}{3} R^2 h$.

CÔNE



SURFACE CONIQUE

Surface engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant constamment sur le contour d'une courbe C. (fig. 1).

Point fixe : **sommet.** Courbe : **directrice.** Droite mobile : **génératrice.**

Surface pyramidale inscrite dans une surface conique (fig. 2).

C'est une surface pyramidale obtenue par le déplacement d'une droite passant par le sommet et s'appuyant sur le périmètre d'un **polygone inscrit** dans la courbe C.

Les propriétés des surfaces pyramidales (Ma. 91) s'appliquent aux surfaces coniques.

En particulier (fig. 3) :

- **les sections d'une surface conique par deux plans parallèles sont semblables ;**
- **le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de leurs distances au sommet.**

S et S′ sont semblables et : $\frac{\text{aire } S}{\text{aire } S'} = \left(\frac{PH}{PH'}\right)^2$

CÔNE

Solide limité par une surface conique et compris entre le sommet et une section plane coupant toutes les génératrices (fig. 4) :

a) **Cône quelconque** (la base est quelconque) ;

b) **Cône circulaire oblique** (la base est un cercle) ;

c) **Cône circulaire droit** (la base est un cercle et le sommet se projette au centre de la base) ou **cône de révolution** (fig. 5) engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

Le triangle rectangle SAB engendre un cône circulaire droit ayant pour **rayon de base** R = AB, pour **hauteur** h = SA et pour **apothème** a = SB.

SA est **l'axe** du cône. D'après le th. de Pythagore :

$$a^2 = R^2 + h^2$$

L'angle $\widehat{ASB} = \alpha$ du triangle rectangle SAB s'appelle le **demi-angle au sommet du cône.**

Sections planes d'un cône.

1° Par un plan **perpendiculaire** à l'axe : ce sont des cercles.

2° Par un plan **passant par l'axe** (fig. 6) : ce sont des triangles isocèles de base 2r et de hauteur h.

3° **Par un plan contenant une génératrice SA** : ce sont des triangles isocèles tels que SAB.

Lorsque le plan sécant pivote autour de la génératrice SA, il peut devenir **tangent au cône** le long de cette génératrice.

Le plan tangent au cône le long de SA (fig. 6) contient la génératrice SA et la tangente AT en A au cercle de centre O.

4° Par un plan, non perpendiculaire à l'axe (Ma. 101) : **ellipse, hyperbole** ou **parabole.**

Angle du développement (n degrés) de la surface latérale d'un cône (fig. 7).

Ce développement est un secteur circulaire dont l'arc a pour longueur 2πr. Le rayon de ce secteur étant égal à l'apothème **a**, d'après Ma. 68, on a :

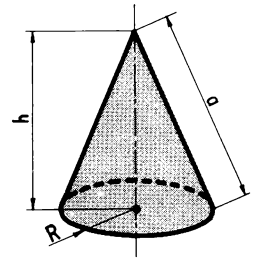
$$\frac{2\pi a \times n}{360} = 2\pi r, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = \frac{360 \times r}{a}}$$

Exemple : $r = 12\ cm$ et $a = 20\ cm$.

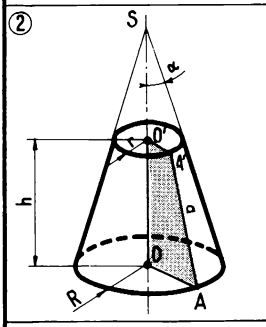
$$n = \frac{360 \times 12}{20} = 216^\circ \text{ (fig. 7).}$$

CÔNE ET TRONC DE CÔNE

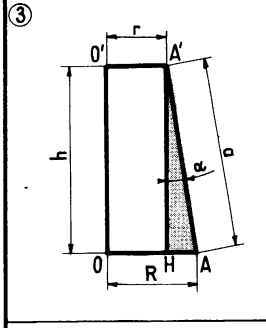
①



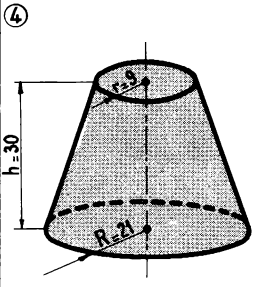
②



③



④



CÔNE DE RÉVOLUTION

Aire latérale d'un cône de révolution (limite vers laquelle tend l'aire latérale d'une pyramide inscrite lorsque le nombre des côtés de la base augmente indéfiniment) : **l'aire latérale d'un cône de révolution est égale au demi-produit du périmètre de sa base par son apothème :**

$$S = \frac{2\pi Ra}{2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S = \pi Ra} \text{ (fig. 1)}$$

D'où aire totale $= \pi Ra + \pi R^2 = \mathbf{\pi R(R + a)}$.

Volume d'un cône de révolution (limite vers laquelle tend le volume d'un prisme inscrit lorsque le nombre des côtés de la base augmente indéfiniment) :
le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \text{ (fig. 1)}$$

Application $R = 13\ cm$ et $a = 17\ cm$.

$h = \sqrt{17^2 - 13^2} = \sqrt{120} = 10{,}95\ cm$.

Aire latérale : $3{,}14 \times 13 \times 17 = \mathbf{693{,}9}\ cm^2$

Volume : $\dfrac{3{,}14 \times 13^2 \times 10{,}95}{3} = \mathbf{1\,904}\ cm^3$.

TRONC DE CÔNE DE RÉVOLUTION

Le tronc de cône circulaire droit (solide limité par la base d'un cône et la section par un plan parallèle à la base et situé du même côté du sommet) peut être considéré comme engendré par la rotation du trapèze rectangle OAA'O' autour de OO' (fig. 2).

Rayons des bases : R et r | **Apothème :** a
Hauteur du tronc : h | **Axe :** OO'.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\mathbf{a^2 = (R - r)^2 + h^2}.$$

L'angle HA'A $= \alpha$ est l'angle que forment les génératrices avec l'axe du tronc de cône (fig. 3).

Application. Calculer l'apothème a et l'angle α d'un tronc de cône pour : $R = 19\ cm$, $r = 15\ cm$ et $h = 30\ cm$.

1° $a^2 = (19 - 15)^2 + 30^2 = 916$, d'où $a = \sqrt{916} = \mathbf{30{,}3}\ cm$

2° $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{30} = 0{,}1333$, d'où $\alpha = \mathbf{7°35'}$.

Aire latérale d'un tronc de cône (de même que tronc de pyramide régulier) : **l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution est égale au demi-produit de la somme des périmètres des bases par l'apothème.**

$$S = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times a \quad \text{ou} \quad \mathbf{S = \pi(R + r)a}$$

Volume du tronc de cône (de même que tronc de pyramide régulier).
La formule du tronc de pyramide (M_1. 93) devient :

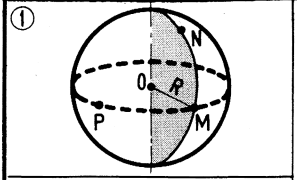
$$V = \frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2}\right)$$

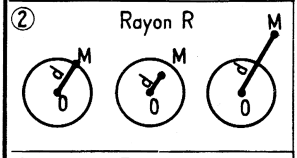
$$\boxed{\mathbf{V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)}}$$

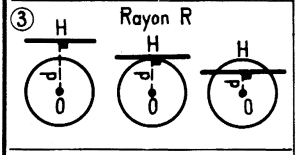
Application. Calculer la surface latérale et le volume du tronc de cône (fig. 4) $R = 21\ cm$ $r = 9\ cm$ $h = 30\ cm$

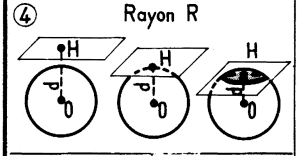
Réponses : $S \approx \mathbf{3043}\ cm^2$; $V \approx \mathbf{22\,325}\ cm^3$.

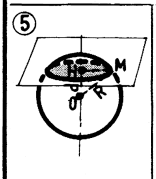
SPHÈRE

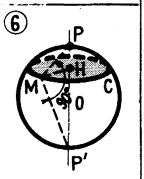


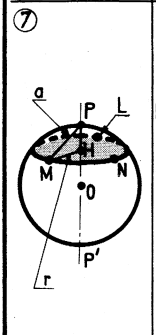


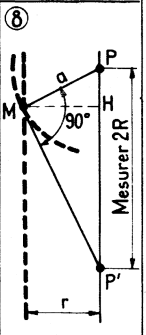












Construire le triangle LMN et déterminer HM = r.

Tracer le cercle de rayon PM = a. Construire le triangle rectangle PMP′ et mesurer PP′ (= 2 R).

Surface sphérique (fig. 1). Une surface sphérique est engendrée par la **révolution d'une demi-circonférence autour de son diamètre.**

Cette surface limite une **sphère :** solide engendré **par la révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre.**

Centre O du demi-cercle : **centre de la sphère.**

Diamètre du demi-cercle = 2R **(diamètre de la sphère).**

Tous les points M, N, P... de la sphère sont à la même distance R du point O :

la sphère est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un point fixe.

Positions relatives d'un point et d'une surface sphérique (ou sphère) (fig. 2).

Distance OM = **d.** Rayon **R.**

- d = R Le point est **sur** la sphère,
- d < R Le point est **intérieur** à la sphère,
- d > R Le point est **extérieur** à la sphère.

Positions relatives d'une droite et d'une sphère (fig. 3).

Distance OH = **d.** Rayon **R** (figure dans le plan passant par le centre O et la droite).

- d > R La droite est **extérieure** à la sphère,
- d = R La droite est **tangente** à la sphère,
- d < R La droite est **sécante** à la sphère.

Positions relatives d'un plan et d'une sphère (fig. 4).

Distance OH = **d.** Rayon **R.**

- d > R Le plan est **extérieur** à la sphère,
- d = R Le plan est **tangent** à la sphère (perpendiculaire en H au rayon),
- d < R Le plan est **sécant** à la sphère.

Section plane d'une sphère (fig. 5).

La section plane d'une sphère est un cercle de centre H et de rayon :

$$r = HM = \sqrt{R^2 - d^2}$$ (petit cercle de la sphère).

Exemple. Dans une sphère de 12 *cm* de rayon, un plan dont la distance au centre de la sphère est de 10 *cm* détermine un petit cercle de rayon:

$$r = \sqrt{12^2 - 10^2} = \sqrt{44} = \mathbf{6{,}63}\ cm.$$

Lorsque le plan passe par le centre (d = 0), la section est un cercle de rayon R **(grand cercle de la sphère).**

Positions relatives de deux sphères (étude analogue à celle relative à deux cercles) (Ma. 56).

Pôles d'un cercle tracé sur une sphère (fig. 6).

Les points P et P′ étant les points où le diamètre perpendiculaire au plan du cercle coupe la sphère, tous les points M de ce cercle sont tels que :

PM = Constante et P′M = Constante.

P et P′ sont les **pôles** du cercle (C). Les points de ce cercle sont **équidistants** de l'un quelconque de ses pôles. Le triangle PMP′ est **rectangle** en M.

Exemple. R = 16 *cm* et OH = d = 7 *cm.*

D'après le théorème de Pythagore :

$PM^2 = PH \times PP' = (16-7) \times 32$

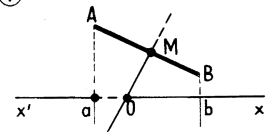
$PM^2 = 288.$ D'où $PM = \sqrt{288} = \mathbf{16{,}97}\ cm.$

Application graphique.

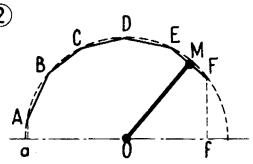
A l'aide d'une construction plane, déterminer le rayon R d'une sphère (fig. 7 et 8).

AIRES DES SURFACES SPHÉRIQUES

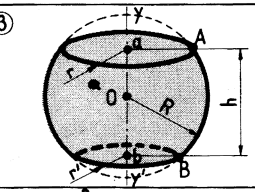
①



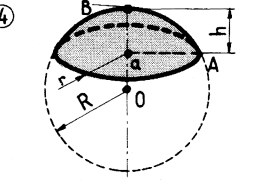
②



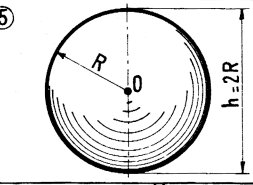
③



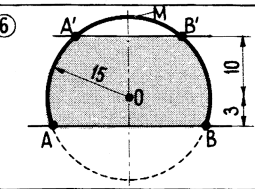
④



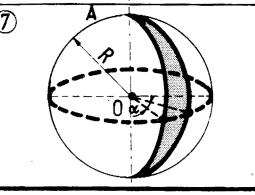
⑤



⑥



⑦



Aire de la surface engendrée par un segment de droite tournant autour d'un axe situé dans un même plan, ne le traversant pas et ne lui étant pas perpendiculaire (fig. 1).

Théorème : $S = ab \times 2\pi . OM$ (OM médiatrice de AB)

Aire de la surface engendrée par une ligne polygonale régulière convexe tournant autour d'un diamètre qui ne la traverse pas (fig. 2).

Théorème : $S = af \times 2\pi . OM$ (OM : apothème)

ZONE SPHÉRIQUE (fig. 3)

Portion de surface sphérique comprise entre deux cercles parallèles.

Hauteur de la zone : **h**. Cercles de base de rayons r et r'.

Aire d'une zone sphérique (limite vers laquelle tend l'aide de la surface engendrée par une ligne polygonale inscrite dans un arc de cercle lorsque le nombre de ses côtés augmente indéfiniment).

L'arc de cercle AB, tournant autour de y'y (fig. 3), engendre une zone de surface :

$S = ab \times 2\pi R$ ou $S = 2\pi Rh$.

CALOTTE SPHÉRIQUE (fig. 4)

Portion de surface sphérique limitée à un cercle de cette sphère :

Hauteur de la calotte **h**. Cercle de base de rayon **r**.

Aire d'une calotte sphérique. De même que pour la calotte sphérique :

$S = aB \times 2\pi R$ ou $\mathbf{S = 2\pi Rh}$.

Sphère (fig. 5), ou calotte de hauteur 2 R :

$S = 2\pi R \times 2R$ ou $\mathbf{S = 4\pi R^2}$.

En fonction du diamètre D :

$$S = 4\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \times \frac{D^2}{4} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S = \pi D^2}$$

Application numérique : sphère, zone et calotte sphériques.

Etant donnée une sphère de 15 *cm* de rayon (fig. 6), calculer : 1° la surface de la sphère ;

2° la surface de la zone dont les bases ont pour diamètres AB et A'B' ;

3° la surface de la calotte A'MB'.

1° $S = 4 \times 3{,}14 \times 15^2 = \mathbf{2\,826}\ cm^2$.

2° Hauteur de la zone : $10 + 3 = 13\ cm$

Surface : $2 \times 3{,}14 \times 15 \times 13 = \mathbf{1\,224{,}6}\ cm^2$.

3° Hauteur de la calotte : $15 - 10 = 5\ cm$.

Surface : $2 \times 3{,}14 \times 15 \times 10 = \mathbf{942}\ cm^2$.

FUSEAU SPHÉRIQUE (fig. 7)

Portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles de même diamètre.

Angle α formé par les plans des deux demi-cercles de diamètre AB : **angle d'ouverture** du fuseau.

Aire d'un fuseau sphérique.

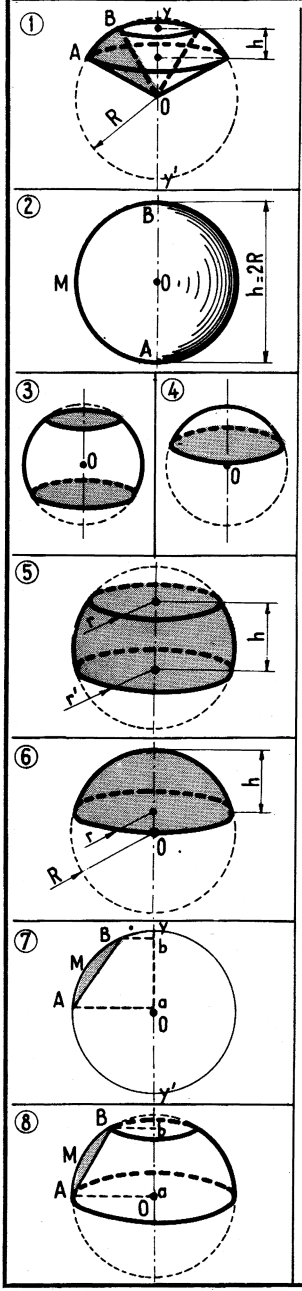
Dans une même sphère, les aires de deux fuseaux sont proportionnelles à leurs angles au centre. Donc :

fuseau de 360° (sphère)	fuseau de 1°	fuseau de n°
$4\pi R^2$	$\frac{4\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{90}$	$\frac{\pi R^2 n}{90}$

Application numérique. Quelle est, sur une sphère de 25 *cm* de rayon, l'aire d'un fuseau de 36° d'ouverture ?

$$S = \frac{3{,}14 \times 25^2 \times 36}{90} = \mathbf{785}\ cm^2.$$

VOLUMES DES CORPS SPHÉRIQUES



Secteur sphérique (fig. 1).

Solide engendré par la révolution d'un secteur circulaire AOB autour d'un diamètre y'y ne le traversant pas.

Il est donc limité par une zone de hauteur **h** et deux surfaces coniques.

Volume du secteur sphérique (limite vers laquelle tend la somme des volumes des pyramides inscrites dans le secteur sphérique lorsque leur nombre augmente indéfiniment).

A la limite : hauteur **commune** des pyramides R ; **somme des aires** de leurs bases = surface de la zone : $2\pi Rh$:

$$V = \frac{1}{3} \times 2\pi Rh \times R = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Sphère (fig. 2), ou secteur sphérique engendré par le secteur circulaire OAMB (demi-cercle h = 2R).

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \times 2R$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\text{ou } \frac{4\pi R^2 \times R}{3} = \frac{\text{aire de la sphère} \times \text{rayon}}{3} \right)$$

Exemple. Calculer le volume d'une sphère de 100 cm^2 de surface.

Le rayon R est donné par la formule : $4\pi R^2 = 100$

D'où $R^2 = \frac{25}{\pi}$ et $R = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = 2{,}82\ cm$

$$V = \frac{100 \times 2{,}82}{3} = 94\ cm^3.$$

Segment sphérique

Démonstration des formules : M2

A deux bases. Fig. 3 : **portion de la sphère comprise entre deux plans parallèles ; limité par une zone et deux cercles.**

Fig. 5. $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2}(r^2 + r'^2)$

Exemple.

$r = 12\ cm$, $r' = 15\ cm$, $h = 9\ cm$

$V = \frac{1}{6} \times 3{,}14 \times 9^3 + \frac{3{,}14 \times 9}{2}(12^2 + 15^2)$

$= 381{,}51 + 5\,213{,}97$

$V \simeq$ **5 595** cm^3

A une base. Fig. 4 : **portion de la sphère située d'un côté d'un plan sécant ; limité par une calotte et un cercle.**

Fig. 6. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

Exemple.

$R = 25\ cm$, $h = 21\ cm$

$V = \frac{3{,}14 \times 21^2}{3}(75 - 21)$

$V = 3{,}14 \times 441 \times 18 \simeq 24\,925\ cm^3$

Autre formule :

$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

Anneau sphérique (fig. 7).

Solide engendré par la révolution d'un segment sphérique AMB autour d'un diamètre y'y ne le traversant pas.

$$V = \frac{1}{6}\pi AB^2 \times ab$$

Exemple. Calculer le volume de l'anneau sphérique engendré par le segment sphérique AMB (fig. 8), sachant que : R = 6 cm et AB : côté de l'hexagone inscrit.

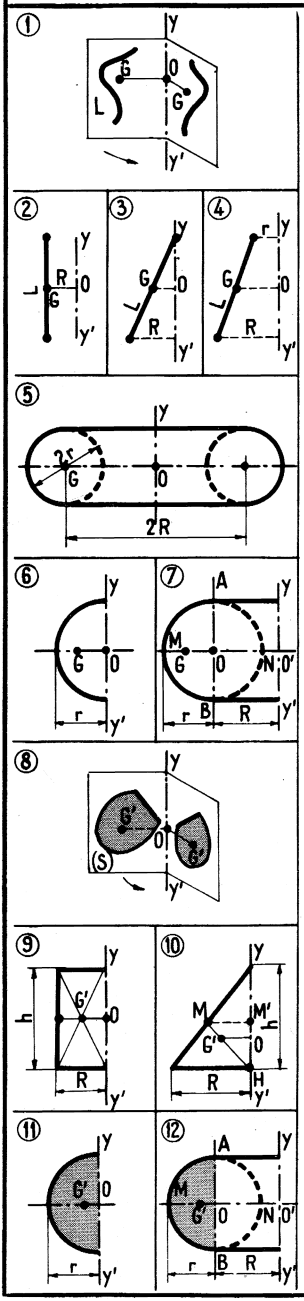
$AB = R = 6$

$ab = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 5{,}196$

$V = \frac{1}{6} \times 3{,}14 \times 6^2 \times 5{,}196$

$V \simeq$ **97,9** cm^3.

SOLIDES DE RÉVOLUTION



PREMIER THÉORÈME DE GULDIN [1] (fig. 1)

L'aire de la surface engendrée par la révolution d'une ligne plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de cette ligne par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

Fig. 1. **$S =$ longueur (L) $\times 2\pi . OG$.**

Vérification dans trois cas particuliers.

Fig. 2. **Cylindre** $S = L \times 2\pi \cdot OG = 2\pi RL$

Fig. 3. **Cône** $S = L \times 2\pi \cdot OG = L \times 2\pi \times \frac{R}{2} = \pi RL.$

Fig. 4. **Tronc de cône** $S = L \times 2\pi \cdot OG = L \times 2\pi \times \frac{R+r}{2} = \pi(R+r)L$

Applications.

1° **Surface de tore** (fig. 5) : $S = 2\pi r \times 2\pi R = \mathbf{4\pi^2 Rr}$.

2° **Centre de gravité d'une demi-circonférence** (fig. 6).
Surf. sphère = longueur demi-circonf. $\times 2\pi . OG$

$$2\pi \cdot OG = \frac{4\pi r^2}{\pi r} \qquad OG = \frac{2r}{\pi} \approx \mathbf{0{,}636r}.$$

3° **Surface s de la portion de tore engendrée par la demi-circonférence AMB et surface s' engendrée par la demi-circonférence AMB** (fig. 7).

$s = \pi r \times 2\pi . O'G$
$= \pi r \times 2\pi(R + 0{,}636r)$
$\mathbf{s = 2\pi^2 r(R + 0{,}636r)}$

D'où : $s' = S - s$
$= 4\pi^2 Rr - 2\pi^2 r(R + 0{,}636r)$
$\mathbf{s' = 2\pi^2 r(R - 0{,}636r)}$

DEUXIÈME THÉORÈME DE GULDIN (fig. 8)

Le volume du solide engendré par la révolution d'une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de cette surface par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

Fig. 8. **$V =$ aire (S) $\times 2\pi . OG$.**

Vérification dans deux cas particuliers.

Fig. 9. **Cylindre** $V = (R \times h) \times 2\pi \cdot OG' = R \times h \times 2\pi \times \frac{R}{2}$

$V = \pi R^2 h.$

Fig. 10. **Cône.** $OG' = MM' \times \frac{2}{3} = \frac{R}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{R}{3}$

$$V = \frac{R \times h}{2} \times 2\pi \cdot OG = \frac{R \times h}{2} \times 2\pi \cdot \frac{R}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Applications.

1° **Volume du tore** (fig. 5) : $V = \pi r^2 \times 2\pi R = \mathbf{2\pi^2 Rr^2}$.

2° **Centre de gravité d'un demi-cercle** (fig. 11) :
Volume sphère = aire demi-cercle $\times 2\pi . OG'$.

$2\pi \cdot OG' = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{\pi r^2}{2}$ D'où $OG' = \frac{4\pi r^3 \times 2}{3 \times \pi r^2 \times 2\pi} = \frac{4r}{3\pi} \approx \mathbf{0{,}424r}.$

3° **Volume v de la portion de tore engendrée par le demi-cercle AMB et volume v' engendré par le demi-cercle ANB** (fig. 12).

$v = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi \cdot O'G'.$

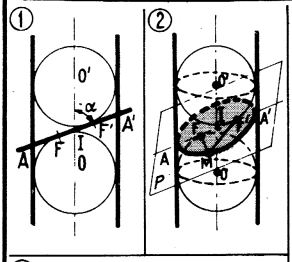
$v = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi(R + 0{,}424r)$

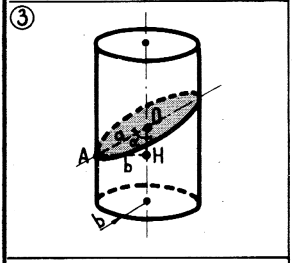
$\mathbf{v = \pi^2 r^2(R + 0{,}424r)}$

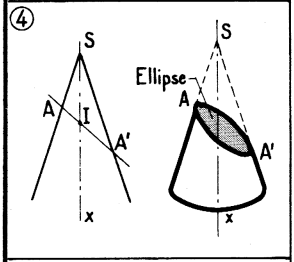
D'où : $v' = V - v$
$= 2\pi^2 Rr^2 - \pi^2 r^2(R + 0{,}424r)$
$\mathbf{v' = \pi^2 r^2(R - 0{,}424r)}$

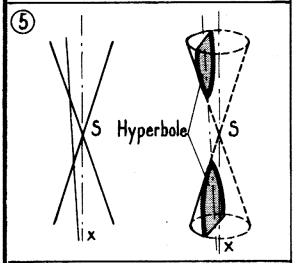
[1] GULDIN, mathématicien suisse (1577-1643), né à St-GALL.
(Démonstration des théorèmes : M_2. 123).

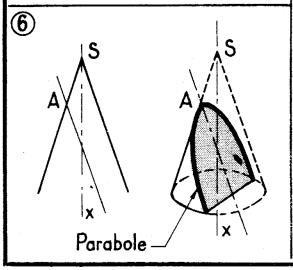
SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CÔNE











SECTION DU CYLINDRE

Théorème.

La section d'un cylindre par un plan qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à l'axe du cylindre est une ellipse.

On démontre (fig. 2) que :

$$MF + MF' = AA' = C^{te}.$$

L'ellipse représentée fig. 2 a donc pour grand axe AA′ et pour petit axe le diamètre du cylindre.

Exemple I. Calculer les éléments **2a, 2b, 2c** de l'ellipse obtenue en coupant un cylindre de 26 *mm* de diamètre par un plan AA′ tel que $\alpha = 33^o$ (fig. 1).

$2b = \mathbf{26}\ mm$ (diamètre du cylindre)

$$2a = AA' = \frac{26}{\sin 33^o} = \frac{26}{0{,}5446} = \mathbf{47{,}7}\ mm.$$

$$2c = \sqrt{47{,}7^2 - 26^2} = \sqrt{1599{,}29} \simeq \mathbf{40}\ mm. \quad (M_1.\ 79)$$

Exemple II. Déterminer l'angle α formé par le plan sécant avec l'axe du cylindre de manière que l'aire de la section elliptique soit les 3/2 de l'aire de la base du cylindre (fig. 2).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aire de la section elliptique : } \pi ab \\ \text{Aire de la base : } \pi b^2.\end{array}\right\}$$

D'où : $\dfrac{\pi ab}{\pi b^2} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2}$, ou $(M_1.\ 73)\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3} = \sin\alpha$

Pour $\sin\alpha = \dfrac{2}{3} = 0{,}6667$, on a $\alpha = \mathbf{41^o49'}$.

SECTION DU CÔNE

Théorème.

La section d'un cône par un plan qui ne passe pas par son sommet et qui n'est pas perpendiculaire à l'axe est :

1° une ***ellipse,*** si le plan rencontre toutes les génératrices **d'une même nappe du cône** (fig. 4) ;

2° une ***hyperbole,*** si le plan rencontre les **deux nappes du cône** (fig. 5) ;

3° une ***parabole,*** si le plan est **parallèle à un plan tangent au cône** (fig. 6).

Exemple (fig. 4). L'angle d'un cône mesure 28°. Calculer le grand axe de la section du cône par un plan passant par le point I, situé à 70 *mm* du sommet et faisant avec l'axe un angle de 32°.

Grand axe $AA' = AI + IA'$.

Calcul de AI
(triangle SAI)

$\widehat{SAI} = 180^o - 14^o - 32^o$

$\widehat{SAI} = 134^o$

D'après Ma. 76 :

$$\frac{AI}{\sin 14^o} = \frac{70}{\sin 134^o}$$

$$AI = \frac{70 \times \sin 14^o}{\sin 134^o}$$

$$AI = \frac{70 \times 0{,}2419}{0{,}7193}$$

$AI = 23{,}5\ mm.$

Calcul de IA′
(triangle SA′I)

$\widehat{SA'I} = 180^o - 28^o - 134^o$

$\widehat{SA'I} = 18^o$

D'après Ma. 76 :

$$\frac{A'I}{\sin 14^o} = \frac{70}{\sin 18^o}$$

$$A'I = \frac{70 \times \sin 14^o}{\sin 18^o}$$

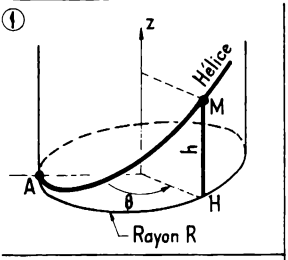
$$A'I = \frac{70 \times 0{,}2419}{0{,}3090}$$

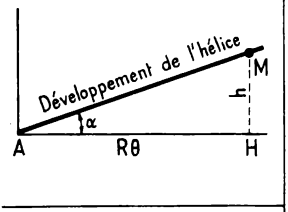
$A'I = 54{,}8\ mm.$

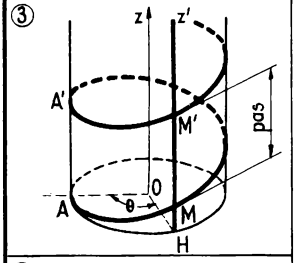
Grand axe $AA' = 23{,}5 + 54{,}8 = \mathbf{78{,}3}\ mm.$

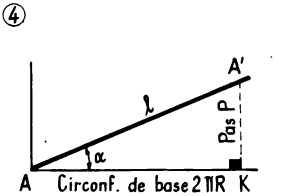
HÉLICE CYLINDRIQUE

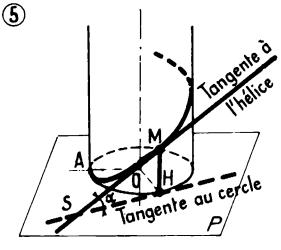
M_1. 102

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

Définition. Un point M de la surface d'un cylindre étant repéré par :

son **abscisse curviligne** $\overset{\frown}{AH} = R\theta$ (θ en radians)
et son **ordonnée** $HM = h$,
l'hélice est une courbe tracée sur la surface du cylindre et telle que le rapport de l'ordonnée de chacun de ses points à son abscisse curviligne est constant :

$$\frac{h}{R\theta} = C^{te} = k \qquad (k, \text{ nombre constant})$$

En développant sur un plan la surface latérale du cylindre, tous les points de l'hélice AM (fig. 1) sont sur une **ligne droite** (fig. 2) car :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{R\theta} = k, \qquad \text{d'où } \alpha = \textbf{angle constant.}$$

Pas de l'hélice (fig. 3).

Pour deux points consécutifs M et M′ de l'hélice situés sur une même génératrice Hz′ du cylindre, on a :

$$\frac{HM}{R\theta} = k \quad \text{et} \quad \frac{HM'}{R(\theta + 2\pi)} = k$$

D'où : $MM' = HM' - HM = k.R\theta + k.2\pi R - k.R\theta$
$MM' = 2\pi R \times k =$ **pas P de l'hélice** (constant).

Sur la figure représentant le développement de l'hélice (fig. 4), le pas P est égal à l'ordonnée du point de l'hélice qui a pour abscisse curviligne $2\pi R$. D'où :

$$\mathbf{P = 2\pi R \times \operatorname{tg}\alpha.}$$

Spire. **Longueur d'une spire.** L'arc d'hélice compris entre deux points consécutifs situés sur une même génératrice s'appelle une **spire.**

Longueur L d'une spire (fig. 4) :

$$L^2 = AA'^2 = AK^2 + KA'^2 = 4\pi^2R^2 + P^2$$

$$\mathbf{L = \sqrt{4\pi^2R^2 + P^2}.}$$

Application numérique. Calculer, pour $R = 12$ *cm* et $\alpha = 25°$, le pas et la longueur d'une spire de l'hélice (fig. 4).

$$P = 2\pi R \times \operatorname{tg}\alpha = 6{,}28 \times 12 \times \operatorname{tg} 25°$$
$$= 6{,}28 \times 12 \times 0{,}466$$
$$P = \textbf{35,1 cm.}$$

$$L = \sqrt{4 \times 3{,}14^2 \times 12^2 + 35{,}1^2} = \textbf{83,1 cm.}$$

Tangente à l'hélice (fig. 5). On démontre que :

la tangente en M à l'hélice fait avec le plan de base un angle α égal à celui que fait le développement de l'hélice avec le développement de la circonférence de base.

D'où $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{P}{2\pi R}$ (l'hélice a une pente constante).

2° Le segment SH (**sous-tangente** à l'hélice en M) a même longueur que l'arc AH (**abscisse curviligne** de M).

Application numérique.

Calculer, en degrés, l'inclinaison d'une hélice sur le plan de la base du cylindre, connaissant le diamètre du cylindre 36 *mm* et le pas de l'hélice 20 *mm*.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{P}{2\pi R} = \dfrac{P}{\pi D} = \dfrac{20}{3{,}14 \times 36}$. D'où $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}176$ et $\alpha \approx \mathbf{10°}$.

L'impression de ce livre
a été réalisée sur les presses
des Imprimeries Aubin
à Poitiers/Ligugé

pour les Editions Delagrave

Achevé d'imprimer le 15 janvier 1979
N° d'édition, 5038. — N° d'impression, L 11164
Dépôt légal, 1er trimestre 1979

DOCUMENTATION

GÉNÉRALE

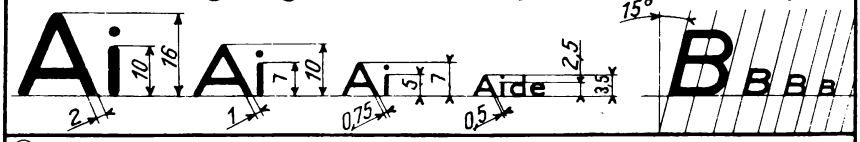
Doc.		Doc.	
1	Lettres et chiffres.	28	Transformations trigonométriques
2	Nombres normaux.	29 et 30	Table des sinus et cosinus.
3	Principales unités.	31 et 32	Table des tangentes et cotangentes.
4	Équivalences.	33	Degrés - Grades - Radians.
5	Arithmétique.	34	Grades.
6	Nombres premiers.	35	Triangle rectangle.
7 et 8	Nombres approchés.	36	Triangle quelconque.
9 et 10	Calcul algébrique.	37 et 38	Arc. Corde. Flèche. Segment.
11	Equations - Fonctions.	39	Circonférence (πD).
12	Equations de courbes.	40	Cercle ($\pi D^2/4$).
13	Dérivées - Primitives.	41	Surfaces planes.
14	Logarithmes décimaux.	42	Solides (à surf. développable).
15 et 16	Table des logarithmes.	43	Solides (à surf. non développable).
17 et 18	Table des carrés.	44	Centre de gravité.
19 et 20	Table des racines carrées.	45	Résistance des matériaux.
21 et 22	Table des cubes.	46	Masse des barres et des tôles.
23 et 24	Table des racines cubiques.	47	Caractéristiques des produits.
25 et 26	Table des inverses.		
27	Fonctions circulaires.		

Doc 1 — LETTRES _ CHIFFRES — β

① *Alphabet latin _* *(extrait de NF.E.04.105)*

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z



② *Alphabet grec _*

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ ς τ υ φ χ ψ ω

alpha	bêta	gamma	delta	epsilonn	dzéta	êta	thêta	iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omicronn	pi	rô	sigma	tau	upsilonn	phi	khi	psi	oméga

③ *Chiffres arabes _* *(extrait de NF.X.02.005).*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

RÈGLES D'ÉCRITURE	EXEMPLES
1_ *Séparer les nombres en tranches de trois chiffres par un espace inférieur à la largeur d'un chiffre.*	
NOMBRES ENTIERS : à partir de la droite	3 850 363
NOMBRES DÉCIMAUX : à partir de la virgule	0,000 485
Exception pour les dates	2 octobre 1956
2_ *Écrire les symboles d'unité sans point d'abréviation, ni jamais la marque du pluriel*	131,5 cm
Exceptions — *Nombres complexes*	2,75 h ou 2 h 45 min
Exceptions — *Écritures commerciales*	F 170

④ *Chiffres romains _*

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

RÈGLES D'ÉCRITURE	EXEMPLES
1_ *Plusieurs chiffres égaux écrits à la suite s'ajoutent*	XXX = 30
2_ *Tout chiffre écrit à la droite d'un chiffre plus fort s'ajoute à celui-ci*	DLV = 555
3_ *Tout chiffre écrit à la gauche d'un chiffre plus fort se retranche de celui-ci*	XC = 90
4_ *Tout nombre surmonté d'un trait exprime des mille, de deux traits des millions*	$\overline{X}$ = 10 000

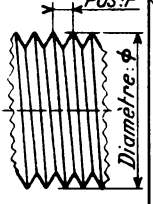
N — NOMBRES NORMAUX — Doc 2

① SÉRIES RENARD

1 à 10				10 à 100					100 à 1000						
ORDRE DE PRÉFÉRENCE				ORDRE DE PRÉFÉRENCE					ORDRE DE PRÉFÉRENCE						
1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	Valeurs exactes R 20
Valeurs recommandées			À éviter	Valeurs recommandées			Valeurs à éviter		Valeurs recommandées			Valeurs à éviter			
Ra 5	Ra 10	Ra 20		Ra 5	Ra 10	Ra 20			Ra 5	Ra 10	Ra 20				
1	1	1		10	10	10			100	100	100				100
		1,1				11					110	105			112,20
	1,2	1,2			12	12				125	125	120	115		125,89
		1,4	1,5			14	13				140	130	135		141,25
							15					150	145		
1,6	1,6	1,6		16	16	16			160	160	160		155		158,49
		1,8				18	17				180	170	165		177,83
	2	2			20	20	19			200	200	190	175		199,53
		2,2				22	21	23			220	210	185		223,87
							24					240	195		
													230		
2,5	2,5	2,5		25	25	25			250	250	250				251,19
		2,8				28	26				280	260	270		281,84
	3	3			32	32	30			315	315	300	290		316,23
		3,5				36	34	35			355	340	310		354,81
							38					380	320	330	
													350		
													360	370	
4	4	4		40	40	40			400	400	400		390		398,11
		4,5				45	42	44			450	420	410		446,68
	5	5			50	50	48	46		500	500	480	430	440	501,19
		5,5				56	52	55			560		460	470	562,34
							60	58					490		
6	6	6		63	63	63		62	630	630	630				630,96
		7				70	68	65			710				707,95
	8	8			80	80	75	72		800	800				794,33
		9				90	85	78			900				891,25
								82							
							95	88							
								92							
10	10	10		100	100	100		98	1000	1000	1000				1000

Dans la cotation des dessins on adopte de préférence les termes des séries Ra 5, Ra 10, Ra 20 indiqués dans le tableau ci-dessus !
Sauf pour les filetages S I. dont les valeurs sont données ci-dessous. (Diamètre - Pas).

② SYSTÈME INTERNATIONAL DE FILETAGE



M

3 — 0,5 ; (3,5) — 0,6 ; 4 — 0,7 ; (4,5) — 0,75 ; 5 — 0,8 ; 6 — 1 ; 8 — 1,25 ; 10 — 1,5 ; 12 — 1,75 ; 14 — 2 ; 16 — 2 ; 18 — 2,5 ; 20 — 2,5 ; 22 — 2,5 ; 24 — 3 ; 27 — 3 ; 30 — 3,5 ; 33 — 3,5 ; 36 — 4 ; 39 — 4 ; 42 — 4,5 ; 45 — 4,5 ; 48 — 5 ; 52 — 5 ; 56 — 5,5 ; 60 — 5,5 ; 64 — 6 ; 68 — 6 ; 72 — 6 ; 76 — 6 ; 80 — 6 ; (7) — 1 ; (9) — 1,25 ; (11) — 1,5

( ) Valeurs à éviter

ϕ	P

Progr.ion arith.que	r = 0,5	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4

③ MASSES NORMALES DE PESÉE (1 à 1000)

1, 2 , 5, 10, 20 , 50, 100, 200 , 500, 1000

Doc 3 — PRINCIPALES UNITÉS

SYSTÈME INTERNATIONAL

	GRANDEUR — Nom	Symbole	UNITÉ — Nom	Symbole
GÉOMÉTRIE	Longueur	L	Mètre	m
	Superficie	S	Mètre carré	m^2
	Volume	V	Mètre cube	m^3
	Angle plan	α	Radian	rad
	Angle solide	Ω	Stéradian	sr
MASSE	Masse	M	Kilogramme	kg
	Masse volumique	ϱ	Kilogramme par mètre cube	kg/m^3
MÉCANIQUE	Temps	t	Seconde	s
	Fréquence	f	Hertz	Hz
	Vitesse	v	Mètre par seconde	m/s
	Accélération	γ	Mètre par seconde, par seconde	m/s^2
	Force	F	Newton	N
	Contrainte ou Pression	p	Newton par mètre carré ou pascal (*Pa*)	N/m^2
	Energie ou Travail	W	Joule	J
	Puissance	P	Watt	W
	Moment	$\mathcal{M}$	Newton.mètre	N.m
	Couple	c	Newton.mètre	N.m
CHALEUR	Température	t	Degré Celsius ou Degré Kelvin	°C, °K
	Chaleur massique	C	Joule par kilogramme et par degré	J/kg/°
ÉLECTRICITÉ	Intensité de courant	I	Ampère	A
	Quantité d'électricité	Q	Coulomb	C
	Force électro-motrice, diff. de potentiel	E ou U	Volt	V
	Résistance électrique	R	Ohm	Ω
	Induction magnétique	B	Tesla	T
	Flux magnétique	Φ	Weber	Wb
	Inductance électrique	L	Henry	H
	Capacité électrique	C	Farad	F
OPTIQUE	Intensité lumineuse	I	Candela	cd
	Flux lumineux	Φ	Lumen	lm
	Eclairement	E	Lux	lx
	Luminance	L	Candela par mètre carré	cd/m^2
	Vergence optique	Φ	Dioptrie	δ

TABLEAU DE CONVERSION DES UNITÉS DE MÉCANIQUE

LONGUEUR	MASSE	FORCE	TEMPS	VITESSE	TRAVAIL	PUISSANCE	PRESSION	MOMENT

UNITÉS DU SYSTÈME INTERNATIONAL (S.I.)

m	*kg*	*N*	*s*	$\frac{m}{s}$	$J = N.m$	$W = \frac{N.m}{s}$	$Pa = \frac{N}{m^2}$	*m.N*

AUTRES UNITÉS IMPORTANTES ET LEUR VALEUR EN UNITÉ S.I.

μ	0,000 001	*g*	0,001	*da N*	10	*mn*	60	$\frac{m}{mn}$	$\frac{1}{60}$	*W.h*	3 600		*millibar*	100
mm	0,001	*t*	1 000			*h*	3 600	$\frac{km}{h}$	$\frac{1000}{3600}$	*cal*	4,1855		$\frac{N}{cm^2}$	10 000
km	1 000	*carat*	0,000 2							*Cal*	4 185,5		*bar*	100 000
mille	1 852									*th*	4 185 500		$\frac{N}{mm^2}$	1 000 000

CONVERSION ENTRE SYSTÈMES

Systèmes	FORCE	ÉNERGIE	PUISSSANCE	PRESSION
MKSA	1 N = 1 kgf : 9,81	1 J = 1 kgm : 9,81	1W = 1kgm/s : 9,81	1Pa = 1kgf/m^2 : 9,81
MTS	1 sthène = 10^3N	1 kilojoule = 10^3J	1 kilowatt = 10^3W	1 pièze = 10^3Pa
CGS	1 dyne = 10^{-5}N	1 erg = 10^{-7}J	1erg/seconde = 10^{-7}W	1 barye = 10^{-1}Pa

ÉQUIVALENCES

Doc 4

① SYMBOLES

extrait de F.D.X 02.005

Symbole	SIGNIFICATION	Symbole	SIGNIFICATION	Symbole	SIGNIFICATION
+	plus	≠	différent de	l, L	longueur
−	moins	≈	égal environ à	r, R	rayon
±	plus ou moins	∼	équivalent à	d, D	diamètre
× ou •	multiplié par	=	égal	$\overline{AOB}$	angle
: ou /	divisé par	<	inférieur à	$\overset{\frown}{AOB}$	arc
%	pour cent	⩽	ou au plus égal à	sin	sinus
‰	pour mille	>	supérieur à	cos	cosinus
a^2	puiss.ce exposant 2	⩾	ou au moins égal à	tg	tangente
a^n	puiss.ce exposant n	↗	croît	cotg	cotangente
a_n	indice n	↘	décroît	π	3,1416
$\sqrt{a}$	racine carrée	∥	parallèle	h	hauteur
$\sqrt[n]{a}$	racine n ième	⊥	perpendiculaire	etc..	et la suite

Nota _ *Le signe "multiplié par" entre deux nombres (×); entre deux lettres (•)*

② TABLEAU DES PRÉFIXES

FACTEUR par lequel est multiplié l'unité	SYMBOLE	PRÉFIXE	EXEMPLES D'UTILISATION
10^3 ou 1 000	k	*kilo*	kg _____ *kilogramme*
10^2 ou 100	h	*hecto*	hm _____ *hectomètre*
10^1 ou 10	da	*déca*	dag _____ *décagramme*
10^0 ou 1			
10^{-1} ou 0,1	d	*déci*	dm _____ *décimètre*
10^{-2} ou 0,01	c	*centi*	cm _____ *centimètre*
10^{-3} ou 0,001	m	*milli*	mm _____ *millimètre*
10^{-4} ou 0,000 1	dm	*décimilli*	dmm _____ *décimillimètre*
10^{-5} ou 0,000 01	cm	*centimilli*	cmm _____ *centimillimètre*
10^{-6} ou 0,000 001	µm	*micro*	µm _____ *micromètre*

Nota : *Micromètre (µm) s'écrit (µ) micron*

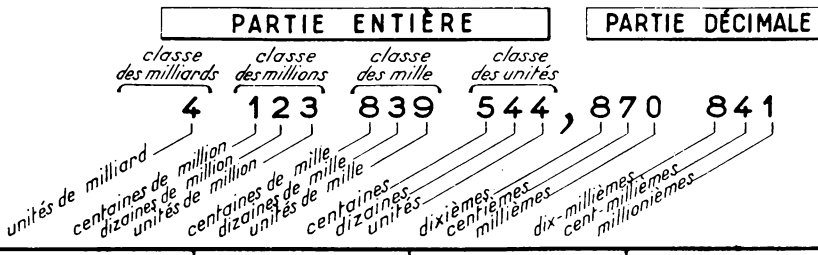
③ CONVERSION DES FRACTIONS DE POUCE EN mm

fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm	fr. de pouce	mm
1/32	0,79	9/32	7,14	17/32	13,49	25/32	19,84
1/16	1,59	5/16	7,94	9/16	14,29	13/16	20,64
3/32	2,38	11/32	8,73	19/32	15,08	27/32	21,43
1/8	3,17	3/8	9,52	5/8	15,87	7/8	22,22
5/32	3,97	13/32	10,32	21/32	16,67	29/32	23,02
3/16	4,76	7/16	11,11	11/16	17,46	15/16	23,81
7/32	5,56	15/32	11,91	23/32	18,26	31/32	24,60
1/4	6,35	1/2	12,70	3/4	19,05	1 pouce =	25,4 mm

Doc 5

ARITHMÉTIQUE

TERMINOLOGIE DES NOMBRES



ADDITION ① +	SOUSTRACTION ② −	MULTIPLICATION ③ ×	DIVISION ④ :
Ex. 128,75 + 3,42 = 132,17	*Ex.* 128,75 − 3,42 = 125,33	*Ex.* 1,5 × 0,03 = 0,045 ; 15 × 3 = 45	*Ex.* 2,4 : 0,12 → 240 | 12 ; 000 | 20
Aligner les virgules verticalement.	*Aligner les virgules verticalement.*	*Multiplier les nombres. Placer la virgule.*	*Équilibrer les décimales. Diviser.*

⑤ CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ		EXEMPLES
Par 2	*Terminé à droite par 0 ou un chiffre pair .*	20 ; 238
Par 5	*Terminé à droite par 0 ou 5 .*	320 ; 45
Par 3	*Somme des chiffres divisible par 3 .*	39 ; 1434
Par 9	*Somme des chiffres divisible par 9 .*	36 ; 8073

FRACTIONS

⑥ SIMPLIFICATION	⑦ RÉDUCTION AU MÊME DÉNOMINATEUR
$\frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \dots\dots\dots\dots = \frac{3}{4}$	$\frac{5}{8} = \frac{5\times3}{8\times3} = \frac{15}{24}$ *et* $\frac{7}{6} = \frac{7\times4}{6\times4} = \frac{28}{24}$
Diviser les deux termes par le même nombre.	*Prendre pour dénominateur commun un nombre divisible par tous les dénominateurs.*

⑧ ADDITION	⑨ SOUSTRACTION	⑩ MULTIPLICATION	⑪ DIVISION
Ex. $\frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{13}{16}$	*Ex.* $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	*Ex.* $\frac{3}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{3\times2}{8\times15} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$	*Ex.* $\frac{3}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3\times15}{5\times4} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$
Réduire au même dénominateur. Additionner les numérateurs.	*Réduire au même dénominateur . Soustraire les numérateurs.*	*Multiplier entre eux les numérateurs, puis les dénominateurs. Simplifier si possible.*	*Multiplier la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.*

PGCD PPCM

NOMBRES PREMIERS

Doc 6

① LISTE DES NOMBRES PREMIERS

1	137	317	523	743	977	1213	1453	1693	1951	2213	2447	2713
2	139	331	541	751	983	1217	1459	1697	1973	2221	2459	2719
3	149	337	547	757	991	1223	1471	1699	1979	2237	2467	2729
5	151	347	557	761	997	1229	1481	1709	1987	2239	2473	2731
7	157	349	563	769	1009	1231	1483	1721	1993	2243	2477	2741
11	163	353	569	773	1013	1237	1487	1723	1997	2251	2503	2749
13	167	359	571	787	1019	1249	1489	1733	1999	2267	2521	2753
17	173	367	577	797	1021	1259	1493	1741	2003	2269	2531	2767
19	179	373	587	809	1031	1277	1499	1747	2011	2273	2539	2777
23	181	379	593	811	1033	1279	1511	1753	2017	2281	2543	2789
29	191	383	599	821	1039	1283	1523	1759	2027	2287	2549	2791
31	193	389	601	823	1049	1289	1531	1777	2029	2293	2551	2797
37	197	397	607	827	1051	1291	1543	1783	2039	2297	2557	2801
41	199	401	613	829	1061	1297	1549	1787	2053	2309	2579	2803
43	211	409	617	839	1063	1301	1553	1789	2063	2311	2591	2819
47	223	419	619	853	1069	1303	1559	1801	2069	2333	2593	2833
53	227	421	631	857	1087	1307	1567	1811	2081	2339	2609	2837
59	229	431	641	859	1091	1319	1571	1823	2083	2341	2617	2843
61	233	433	643	863	1093	1321	1579	1831	2087	2347	2621	2851
67	239	439	647	877	1097	1327	1583	1847	2089	2351	2633	2857
71	241	443	653	881	1103	1361	1597	1861	2099	2357	2647	2861
73	251	449	659	883	1109	1367	1601	1867	2111	2371	2657	2879
79	257	457	661	887	1117	1373	1607	1871	2113	2377	2659	2887
83	263	461	673	907	1123	1381	1609	1873	2129	2381	2663	2897
89	269	463	677	911	1129	1399	1613	1877	2131	2383	2671	2903
97	271	467	683	919	1151	1409	1619	1879	2137	2389	2677	2909
101	277	479	691	929	1153	1423	1621	1889	2141	2393	2683	2917
103	281	487	701	937	1163	1427	1627	1901	2143	2399	2687	2927
107	283	491	709	941	1171	1429	1637	1907	2153	2411	2689	2939
109	293	499	719	947	1181	1433	1657	1913	2161	2417	2693	2953
113	307	503	727	953	1187	1439	1663	1931	2179	2423	2699	2957
127	311	509	733	967	1193	1447	1667	1933	2203	2437	2707	2963
131	313	521	739	971	1201	1451	1669	1949	2207	2441	2711	2969

– Les nombres premiers ne sont divisibles que par eux-mêmes et par l'unité.
Exemple : le nombre 23 n'est divisible que par 23 et par 1.

② FACTEURS PREMIERS ET DIVISEURS D'UN NOMBRE

198	2
99	3
33	3
11	11
1	

Essayer les divisions par tous les nombres premiers en commençant par les plus petits.

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$

198	2	1
99	3	2
33	3	3_6
11	11	9_18
1		11_22_33_66_99_198

Écrire le diviseur 1, puis multiplier chaque facteur par tous les diviseurs déjà écrits.

③ PGCD

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

PGCD = *Produit des facteurs communs affectés de leur plus petit exposant.*

Soient les nombres **1488** *et* **360**

$$\begin{cases} 1488 = 2^4 \times 3 \times 31 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \end{cases}$$

$PGCD = 2^3 \times 3 = 24$

④ PPCM

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

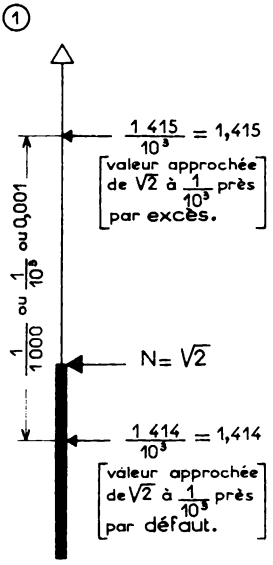
PPCM = *Produit des facteurs communs et non communs affectés de leur plus fort exposant.*

Soient les nombres **600** *et* **175**

$$\begin{cases} 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \\ 175 = 5^2 \times 7 \end{cases}$$

$PPCM = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4\,200$

Doc 7 — NOMBRES APPROCHÉS

① 

VALEURS APPROCHÉES à $\frac{1}{10^n}$ près D'UN NOMBRE DÉCIMAL ILLIMITÉ

Ce sont les deux multiples de $\frac{1}{10^n}$ qui encadrent ce nombre.

Exemple: Le nombre illimité $\sqrt{2} = 1,414\,21\ldots$ a pour valeurs approchées à $\frac{1}{10^3}$ près (0,001 près):

par défaut	par excès
1,414	1,415

La valeur par défaut (1,414) s'appelle aussi: valeur de $\sqrt{2}$ avec 3 décimales exactes.

ERREUR ABSOLUE

Erreur commise quand on remplace un nombre N par une valeur approchée A.

$A - N = e_a$ ou ΔN (s'énonce delta N)

En général ΔN:
- est inconnue, mais sa limite supérieure est connue;
- s'exprime par une puissance de 10;
- est inférieure à $\frac{1}{10^n}$ si A remplace N à $\frac{1}{10^n}$ près.

Exemple: $\sqrt{2} - 1,414 < 0,001$ et $1,415 - \sqrt{2} < 0,001$

② Exemple:

$7,522\,3 < N < 7,523\,1$

Valeur approchée moyenne de N

$= \frac{7,522\,3 + 7,523\,1}{2}$

$= 7,5227$

avec $e_a < 0,004$.

VALEUR APPROCHÉE MOYENNE

C'est la moyenne arithmétique (ou demi-somme) des valeurs approchées extrêmes.

Si $A < N < B$,

la valeur approchée moyenne est $\frac{A+B}{2}$,

avec $\Delta N < \frac{B-A}{2}$.

③ Exemple:

Soit $\sqrt{6} = 2,449\,49\ldots$

donc

$= 2,449$ avec $\Delta N < \frac{1}{2\,000}$	$= 2,4495$ avec $\Delta N < \frac{1}{20\,000}$

SUPPRESSION DE DÉCIMALES

Si l'on supprime les décimales qui suivent la $n^{ème}$:
- l'erreur $\Delta N <$ 1 unité du dernier ordre conservé, soit $\Delta N < \frac{1}{10^n}$;
- en prenant soin de forcer la $n^{ème}$ quand elle est égale ou supérieure à 5, on a: $\Delta N <$ demi-unité du dernier ordre conservé, soit $\Delta N < \frac{1}{2 \times 10^n}$.

④ Exemple:

Pour $N = 25,385$ avec $e_a = \frac{1}{10^3}$

$e_r = \frac{1}{10^3} : 10 = \frac{1}{10^4}$

Exemple:

$N = 0,071\,2$ avec $e_r = \frac{1}{10^4}$

$e_a = \frac{1}{10^4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^5}$

ERREUR RELATIVE

L'erreur relative e_r est le quotient de l'erreur absolue e_a par le nombre exact N:

$$e_r = \frac{e_a}{N} \quad \text{ou} \quad e_r = \frac{\Delta N}{N}$$

On prend: $e_r = \frac{\text{valeur par excès de l'erreur absolue}}{\text{valeur par défaut du nombre N}}$.

Inversement: $e_a = e_r \cdot N$

On prend: e_a = produit des valeurs par excès de e_r et N

L'erreur relative indique la précision d'une mesure.

NOMBRES APPROCHÉS

Doc 8

① SOMME

$N = A + B + \dots$

Erreur absolue ΔN = Somme des erreurs absolues $\Delta A, \Delta B \dots$

$$\Delta N = \Delta A + \Delta B \dots$$

Exemple :

$A = 3{,}714 \quad \Delta A = 0{,}001$

$B = 2{,}054 \quad \Delta B = 0{,}001$

$C = 8{,}955 \quad \Delta C = 0{,}001$

$N = A+B+C = 14{,}723$ avec $\Delta N = 0{,}003$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 14{,}72$ à moins de $0{,}01$ près

② DIFFÉRENCE

$N = A - B$

Exemple :

$A = 8{,}1256 \quad \Delta A = 0{,}0001$

$B = 3{,}4822 \quad \Delta B = 0{,}0001$

$N = A-B = 4{,}6434$ avec $\Delta N = 0{,}0002$ ou $\Delta N < 0{,}001$

$N = 4{,}643$ à moins de $0{,}001$ près

③ PRODUIT

$N = A \times B \times \dots$

Erreur relative $\frac{\Delta N}{N}$ = Somme des erreurs relatives $\frac{\Delta A}{A}, \frac{\Delta B}{B} \dots$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \dots$$

Exemple :

$A = 3{,}142 \quad \Delta A = 0{,}001 ; \frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}001}{1}$

$B = 0{,}548 \quad \Delta B = 0{,}001 ; \frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}001}{0{,}5}$

$N = A \times B = 1{,}721\,816$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}003$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 1{,}72$ à moins de $0{,}01$ près

④ QUOTIENT

$N = \frac{A}{B}$

Exemple :

$A = 2{,}23 \quad \frac{\Delta A}{A} = 0{,}01$

$B = 0{,}87 \quad \frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}01}{0{,}5} = 0{,}02$

$N = \frac{A}{B} = 2{,}563\,2$ avec $\Delta N = 0{,}03$ ou $\Delta N < 0{,}1$

$N = 2{,}6$ à moins de $0{,}1$ près

⑤ PUISSANCE

$N = A^m$

Erreur relative = Produit de $\frac{\Delta A}{A}$ par m

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} \times m$$

Exemple :

$A = 0{,}682 ; \Delta A = 0{,}001 ; \frac{\Delta A}{A} = \frac{0{,}001}{0{,}5} = 0{,}002$

$N = A^2 = 0{,}465\,124$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004$ ou $\Delta N < 0{,}01$

$N = 0{,}47$ à moins de $0{,}01$ près

⑥ RACINE

$N = \sqrt[m]{A}$

Erreur relative = Quotient de $\frac{\Delta A}{A}$ par m

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} : m$$

Exemple :

$A = \pi = 3{,}1416$ avec $\frac{\Delta A}{A} = 0{,}0001$

$N = \sqrt{A} = 1{,}772\,45$ avec $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}000\,05$ ou $\Delta N < 0{,}0001$

$N = 1{,}772\,5$ à moins de $0{,}0001$ près

CONSEILS PRATIQUES

Pour simplifier le langage on dit : "l'erreur absolue" au lieu de "la limite supérieure de l'erreur absolue".

•

• •

Prendre tous les termes d'une somme, ou d'une différence, avec le même nombre de décimales.

•

• •

Lorsqu'une somme ne comporte pas plus de dix termes, supprimer le dernier chiffre du résultat (en forçant s'il y a lieu l'avant-dernier)

•

Même conseil pour différence de deux nombres.

•

• •

Prendre les facteurs d'un produit avec le même nombre de décimales. Conserver, au résultat, une décimale de moins que n'en comporte chaque facteur.

•

Même conseil pour le quotient de deux nombres.

•

• •

Quand on doit calculer une valeur comprise entre deux nombres d'une table numérique (interpolation), le résultat ne peut pas être donné avec un plus grand nombre de décimales que la table n'en comporte.

Doc 9 — CALCUL ALGÉBRIQUE

① PUISSANCES

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(a^m \cdot b^n \cdot c^p\right)^r = a^{mr} \cdot b^{nr} \cdot c^{pr}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

② RACINES

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Application:
Rendre rationnelles les fractions:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \qquad \frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A\left(\sqrt{B} \mp \sqrt{C}\right)}{B - C}$$

③ EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

Définition: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Mêmes règles que pour ①
Exemples:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}}$$

$$a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{a^7}$$

④ EXPOSANTS NÉGATIFS

Définition: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Mêmes règles que pour ①
Exemples:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$$

$$a^{-2} \cdot a^{-4} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

⑤ LES PUISSANCES DE 10

10^{-n}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3} .... 10^{n}
	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

$10^4 \times 10^3 = 10^7$
$10^5 \times 10^{-2} = 10^3$
$10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$

$10^7 : 10^2 = 10^5$
$10 : 10^4 = 10^{-3}$
$10^2 : 10^{-3} = 10^5$

$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$
$(10^4)^{-3} = 10^{-12}$
$\sqrt[2]{10^{-8}} = 10^{-4}$

⑥ PERMUTATIONS

de 3 objets a, b, c

a,b,c b,a,c c,a,b	a,c,b b,c,a c,b,a	$P_3 = 6$

Pour m objets:

$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times m = m!$ (se lit factorielle m)

Ex: $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$
$P_7 = 1 \times 2 \ldots \times 7 = 5040$

⑦ ARRANGEMENTS

de 3 objets a, b, c pris 2 à 2

a,b a,c	b,a b,c	c,a c,b	$A_3^2 = 6$

Pour m objets pris p à p:

$A_m^p = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)$

Ex: $A_3^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

⑧ COMBINAISONS

de 3 objets a, b, c pris 2 à 2

a,b	a,c	b,c	$C_3^2 = 3$

Pour m objets pris p à p:

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}$$

Ex: $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$

CALCUL ALGÉBRIQUE

Doc 10

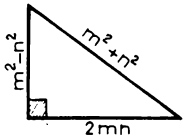
① IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b+c\ldots.)^2 = \Sigma a^2+2\Sigma ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4-b^4$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) = a^5-b^5$$

② APPLICATIONS

Triangles rectangles dont les trois côtés sont des nombres entiers.



En effet: $(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

car: $m^4+2m^2n^2+n^4 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

Exemple:	Exemple:
$m=2$; $n=1$	$m=3$; $n=2$
$5^2 = 3^2+4^2$	$13^2 = 5^2+12^2$
Exemple:	**Exemple:**
$m=7$; $n=3$	$m=13$; $n=6$
$58^2 = 40^2+42^2$	$205^2 = 133^2+156^2$

③ DÉVELOPPEMENT DE $(a+b)^m$

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL

	Coefficients c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
$(a+b)$ ⇨	1	1					
$(a+b)^2$ ⇨	1	2	1				
$(a+b)^3$ ⇨	1	3	3	1			
$(a+b)^4$ ⇨	1	4	6	4	1		
$(a+b)^5$ ⇨	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$ ⇨	1	6	15	20	15	6	1

$$(a+b)^m = c_1a^m+c_2a^{m-1}b+c_3a^{m-2}b^2\ldots+c_{m+1}b^m$$

Pour écrire les coefficients $c_1, c_2, c_3\ldots$, on dresse un tableau (Triangle de Pascal). Chaque nombre est la somme de deux nombres de la ligne précédente: celui qui est au-dessus et celui qui est immédiatement à gauche.

Exemple: 4ᵉ ligne du triangle de PASCAL.

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

④ PROGRESSIONS

ℓ = terme de rang n ; r = raison ; q = raison ; S = somme des n premiers termes

ARITHMÉTIQUE $a, a+r, a+2r, a+3r\ldots$		GÉOMÉTRIQUE $a, aq, aq^2, aq^3\ldots$
$\ell = a+(n-1)r$	Terme de rang n	$\ell = aq^{n-1}$
$S = \frac{(a+\ell)n}{2}$	Somme des n premiers termes	$S = \frac{\ell q-a}{q-1} = a\frac{q^n-1}{q-1}$; Limite $S\left\{\begin{matrix}\text{si } q\neq 1 \\ \text{pour } n=\infty\end{matrix}\right\} = \frac{a}{1-q}$
$r = \frac{b-a}{n}$	Insertion de $(n-1)$ moyens entre a et b	$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$
Somme des n premiers nombres entiers $= \frac{n(n+1)}{2}$	Somme des n premiers nombres impairs $= n^2$	Somme des carrés des n premiers nombres entiers $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

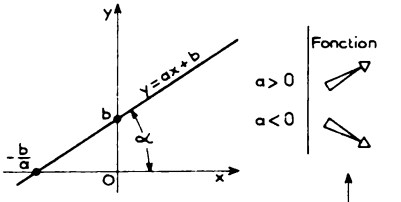
Doc 11 — ÉQUATIONS – FONCTIONS

① PREMIER DEGRÉ

Equation à 1 inconnue $(a \neq 0)$

$ax+b=0$ Racine $x = -\frac{b}{a}$

Fonction $y=ax+b$ *(linéaire)*



$tg\alpha = a$ *(coeff. ang.) si mêmes échelles*

Droites parallèles

$\alpha = \alpha'$

$tg\alpha = tg\alpha'$

$\boxed{a = a'}$

Ex. $\begin{cases} y = 2x+5 \\ y = 2x-4 \end{cases}$

Droites perpendiculaires

$|\alpha - \alpha'| = 90°$

$tg\alpha . tg\alpha' = -1$

$\boxed{a . a' = -1}$

Ex. $\begin{cases} y = 3x-1 \\ y = -\frac{x}{3}+5 \end{cases}$

Droite (coeff. a) passant par $(x_0\, y_0)$

$\boxed{y - y_0 = a(x - x_0)}$

Ex. $\begin{cases} x_0 = 2 \,,\, y_0 = -5 \\ a = 4 \\ y+5 = 4(x-2) \end{cases}$

Droite passant par $(x_0\, y_0)$ et $(x_1\, y_1)$

$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$

Ex. $\begin{cases} x_0 = 2 \,,\, y_0 = -4 \\ x_1 = 5 \,,\, y_1 = 7 \\ \frac{y+4}{x-2} = \frac{7+4}{5-2} \end{cases}$

Système de 2 équations à 2 inconnues

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1er cas	2ème cas
$ab' - ba' \neq 0$	$ab' - ba' = 0$
$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$	$cb' - bc' \neq 0$ Impossibilité *(droites parallèles)*
$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$	$cb' - bc' = 0$ Indétermination *(droites confondues)*

x et y : coordonnées du point d'intersection des deux droites

② SECOND DEGRÉ

Equation à 1 inconnue $(a \neq 0)$

$ax^2+bx+c=0$

1er Cas $b^2-4ac > 0$

Deux racines x′ et x″ $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$x' + x'' = -\frac{b}{a}$ $\quad x'x'' = \frac{c}{a}$

Ex. $5x^2 - 12x + 4 = 0$

$b^2 - 4ac = 144 - 80 = 64 > 0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{12 \pm 8}{10}$

Rép. : $x' = 2$; $x'' = 0{,}4$

2ème Cas $b^2-4ac < 0$

Pas de racine

Ex. $7x^2 + 8x + 3 = 0$

$b^2 - 4ac = 64 - 84 = -20 < 0$

3ème Cas $b^2-4ac = 0$

Une racine $x = -\frac{b}{2a}$

Ex. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

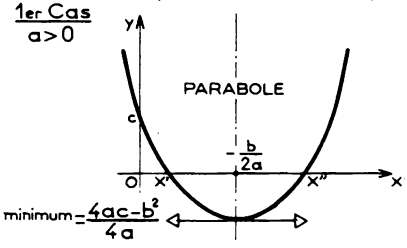
$b^2 - 4ac = 400 - 400 = 0$

$x = 20 : 8$

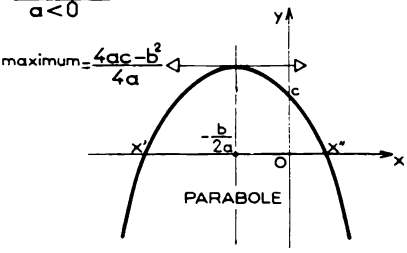
Rép. : $x = 2{,}5$

Fonction $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

1er Cas $a > 0$



2ème Cas $a < 0$

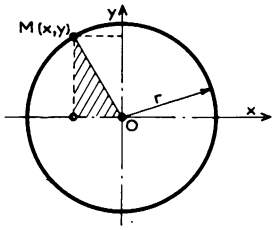


x′ et x″ racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (cas où $b^2-4ac>0$)

ÉQUATIONS DE COURBES

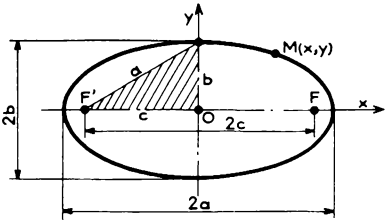
Doc 12

CERCLE



$$x^2+y^2-r^2=0$$

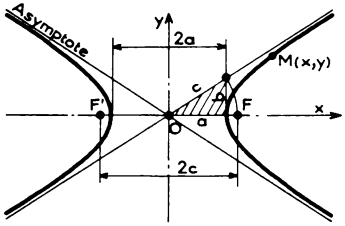
ELLIPSE



$$c^2=a^2-b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

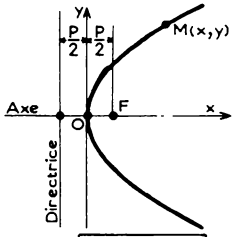
HYPERBOLE



$$c^2=a^2+b^2$$

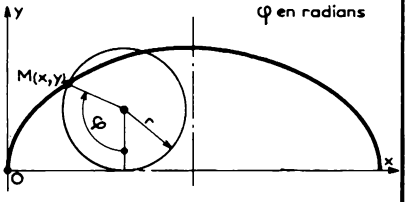
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

PARABOLE



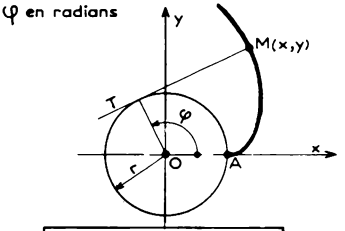
$$y^2=2px$$

CYCLOÏDE



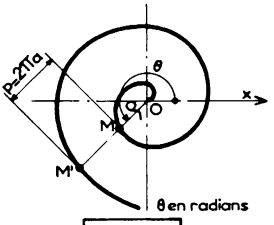
$$x=r(\varphi-\sin\varphi)$$
$$y=r(1-\cos\varphi)$$

DÉVELOPPANTE DE CERCLE



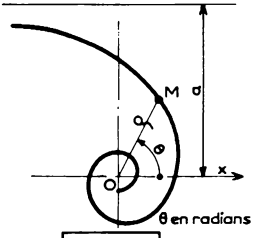
$$x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$$
$$y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$$

SPIRALE d'Archimède
(à pas constant)



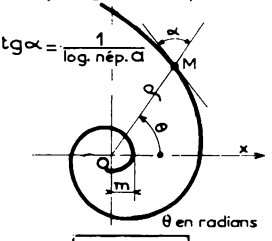
$$\rho=a\theta$$

SPIRALE hyperbolique



$$\rho=\frac{a}{\theta}$$

SPIRALE logarithmique
(à angle constant)



$$\rho=ma^{\theta}$$

Doc 13 — DÉRIVÉES _ PRIMITIVES

① DÉFINITIONS

y = fonction de la variable x

Δy, accroissement de la fonction y pour accroissement Δx de la variable x

Dérivée $y' =$ limite $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, pour $\Delta x \to 0$

y' est la fonction **dérivée** de y
y est une fonction primitive de y'

Exemple: $y = x^2$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

$y' = 2x$ (pour $\Delta x \to 0$)

x^2 a pour dérivée $2x$

x^2 est une primitive de $2x$

Notation:
Une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$, ou intégrale indéfinie de $f(x)$, s'écrit:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

se lit: Somme de $f(x)dx$

② FORMULES USUELLES

PRIMITIVE $F(x)$	FONCTION $f(x)$	DÉRIVÉE $f'(x)$
$x + C$	1	0
$\frac{x^2}{2} + C$	x	1
$\frac{x^3}{3} + C$	x^2	$2x$
$\frac{x^4}{4} + C$	x^3	$3x^2$
$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (pour $m \neq -1$)	x^m	mx^{m-1}
$Lx + C$ (log. nép.)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Lx (log. nép.)	$\frac{1}{x}$
$-\cos x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
(C est une constante)	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \operatorname{tg}^2 x$

③ FONCTION COMPOSÉE de plusieurs fonctions de x telles que $u, v, w \ldots$

	DÉRIVÉE
$u + v + w$	$u' + v' + w'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^m	$mu^{m-1}u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

④ FONCTION de fonction de x

	DÉRIVÉE
$y = f_1(u)$, $u = f_2(v)$, $v = f_3(x)$	$y'_x = y'_u \times u'_v \times v'_x$

Exemple (variable t):

$y = R\sin(\omega t + \varphi)$

y est fonction de $(\omega t + \varphi)$ et $(\omega t + \varphi)$ est fonction de t

Posons:

$$\begin{cases} s = \omega t + \varphi \\ y = R\sin s \end{cases}$$

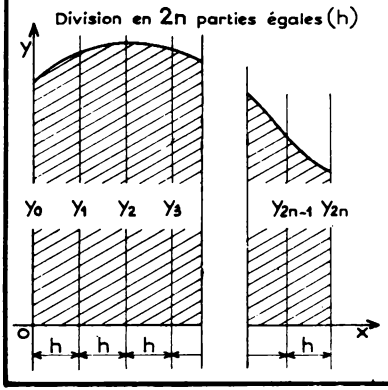
Calculons:

$y'_t = R\cos s \times s'$

ou

$y'_t = R\omega\cos(\omega t + \varphi)$

⑤ QUADRATURES APPROCHÉES



MÉTHODE DES TRAPÈZES

$$S = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_1 + y_2 \cdots \cdots + y_{2n-1})\right]$$

MÉTHODE DE SIMPSON

$$S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 \cdots + y_{2n-1})\right]$$

MÉTHODES DE PONCELET ET DE PARMENTIER

$$S_i = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_{2n} - y_1 - y_{2n-1} + 4(y_1 + y_3 + y_5 \cdots + y_{2n-1})\right]$$

$$S_e = 2h(y_1 + y_3 + y_5 \cdots \cdots + y_{2n-1})$$

Méthode de Poncelet	Méthode de Parmentier
$S = \frac{S_e + S_i}{2}$	$S = \frac{2S_e + S_i}{3}$

log

LOGARITHMES DÉCIMAUX

Doc 14

DÉFINITION DU LOGARITHME n de N : L'ÉGALITÉ $N = 10^n$ ← ENTRAÎNE → L'ÉGALITÉ $n = \log N$

① LOGARITHMES DES PUISSANCES DE 10

Puissances de 10	0,001 ou 10^{-3}	0,01 ou 10^{-2}	0,1 ou 10^{-1}	1 ou 10^0	10 ou 10^1	100 ou 10^2
Logarithmes correspondants	−3	−2	−1	0	1	2

② RECHERCHE DU LOGARITHME D'UN NOMBRE N

LA CARACTÉRISTIQUE (partie entière)	*LA MANTISSE (partie décimale)*
EST ⊕ (si N>1) ou ⊖ (si N<1)	EST TOUJOURS ⊕
Ne se lit pas dans la table	*Se lit dans la table*

1°) Si N est plus grand que 1 : *compter le nombre de ses chiffres avant la virgule et retrancher 1. (la caractéristique est positive ⊕)*

log 9315 = 3,..... (4−1=3)
log 125212 = 5,..... (6−1=5)
log 3,47 = 0,..... (1−1=0)

2°) Si N est plus petit que 1 : *lire le rang occupé par le premier chiffre significatif après la virgule (la caractéristique est négative ⊖)*

log 0,078 = $\overline{2}$,..... (2ème rang)
log 0,00098 = $\overline{4}$,..... (4ème rang)

1°) Nombre de 3 chiffres (100 à 999):

log 515 = 2,71181

2°) Nombre de 2 chiffres ou nombre de 1 chiffre :

log 70 = 1,84510 *(lire à 700)*
log 5 = 0,69897 *(lire à 500)*

3°) Nombre de plus de 3 chiffres :

log 5314 = 3,72509 *(lire à 531)*
log 18967 = 4,27875 *(lire à 190)*

③ RECHERCHE DU NOMBRE DONT ON CONNAIT LE LOGARITHME

EXEMPLES	LOGARITHME DONNÉ	LECTURE MANTISSE *(dans la table)*	NOMBRE DE CHIFFRES:	N NOMBRE CHERCHÉ
Caractéristique positive	4,92221	836 *(lire à 92221)*	avant la virgule 5 *(caract.+1=4+1)*	83 600
Caractéristique négative	$\overline{2}$,75082	563 *(lire à 75082)*	rang du 1er chiffre après la virgule 2 *(caract.)*	0,0563

CORRESPONDANCE DES OPÉRATIONS

	SUR LES NOMBRES	⟷	*SUR LES LOGARITHMES*	
×	MULTIPLICATION	⟷	ADDITION	+
:	DIVISION	⟷	SOUSTRACTION	−
$()^p$	PUISSANCE	⟷	MULTIPLICATION	×
$\sqrt[n]{}$	RACINE	⟷	DIVISION	:

Doc 15

LOGARITHMES

MANTISSES DES NOMBRES DE 100 à 499

log

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.	000 00	004 32	008 60	012 84	017 03	021 19	025 31	029 38	033 42	037 43
11.	041 39	045 32	049 22	053 08	056 90	060 70	064 46	068 19	071 88	075 55
12.	079 18	082 79	086 36	089 91	093 42	096 91	100 37	103 80	107 21	110 59
13.	113 94	117 27	120 57	123 85	127 10	130 33	133 54	136 72	139 88	143 01
14.	146 13	149 22	152 29	155 34	158 36	161 37	164 35	167 32	170 26	173 19
15.	176 09	178 98	181 84	184 69	187 52	190 33	193 12	195 90	198 66	201 40
16.	204 12	206 83	209 52	212 19	214 84	217 48	220 11	222 72	225 31	227 89
17.	230 45	233 00	235 53	238 05	240 55	243 04	245 51	247 97	250 42	252 85
18.	255 27	257 68	260 07	262 45	264 82	267 17	269 51	271 84	274 16	276 46
19.	278 75	281 03	283 30	285 56	287 80	290 03	292 26	294 47	296 67	298 85
20.	301 03	303 20	305 35	307 50	309 63	311 75	313 87	315 97	318 06	320 15
21.	322 22	324 28	326 34	328 38	330 41	332 44	334 45	336 46	338 46	340 44
22.	342 42	344 39	346 35	348 30	350 25	352 18	354 11	356 03	357 93	359 84
23.	361 73	363 61	365 49	367 36	369 22	371 07	372 91	374 75	376 58	378 40
24.	380 21	382 02	383 82	385 61	387 39	389 17	390 94	392 70	394 45	396 20
25.	397 94	399 67	401 40	403 12	404 83	406 54	408 24	409 93	411 62	413 30
26.	414 97	416 64	418 30	419 96	421 60	423 25	424 88	426 51	428 13	429 75
27.	431 36	432 97	434 57	436 16	437 75	439 33	440 91	442 48	444 04	445 60
28.	447 16	448 71	450 25	451 79	453 32	454 84	456 37	457 88	459 39	460 90
29.	462 40	463 89	465 38	466 87	468 35	469 82	471 29	472 76	474 22	475 67
30.	477 12	478 57	480 01	481 44	482 87	484 30	485 72	487 14	488 55	489 96
31.	491 36	492 76	494 15	495 54	496 93	498 31	499 69	501 06	502 43	503 79
32.	505 15	506 51	507 86	509 20	510 55	511 88	513 22	514 55	515 87	517 20
33.	518 51	519 83	521 14	522 44	523 75	525 04	526 34	527 63	528 92	530 20
34.	531 48	532 75	534 03	535 29	536 56	537 82	539 08	540 33	541 58	542 83
35.	544 07	545 31	546 54	547 77	549 00	550 23	551 45	552 67	553 88	555 09
36.	556 30	557 51	558 71	559 91	561 10	562 29	563 48	564 67	565 85	567 03
37.	568 20	569 37	570 54	571 71	572 87	574 03	575 19	576 34	577 49	578 64
38.	579 78	580 92	582 06	583 20	584 33	585 46	586 59	587 71	588 83	589 95
39.	591 06	592 18	593 29	594 39	595 50	596 60	597 70	598 79	599 88	600 97
40.	602 06	603 14	604 23	605 31	606 38	607 46	608 53	609 59	610 66	611 72
41.	612 78	613 84	614 90	615 95	617 00	618 05	619 09	620 14	621 18	622 21
42.	623 25	624 28	625 31	626 34	627 37	628 39	629 41	630 43	631 44	632 46
43.	633 47	634 48	635 48	636 49	637 49	638 49	639 49	640 48	641 47	642 46
44.	643 45	644 44	645 42	646 40	647 38	648 36	649 33	650 31	651 28	652 25
45.	653 21	654 18	655 14	656 10	657 06	658 01	658 96	659 92	660 87	661 81
46.	662 76	663 70	664 64	665 58	666 52	667 45	668 39	669 32	670 25	671 17
47.	672 10	673 02	673 94	674 86	675 78	676 69	677 61	678 52	679 43	680 34
48.	681 24	682 15	683 05	683 95	684 85	685 74	686 64	687 53	688 42	689 31
49.	690 20	691 08	691 97	692 85	693 73	694 61	695 48	696 36	697 23	698 10

EXEMPLES D'UTILISATION

① MULTIPLICATION

$c = a.b \iff \log c = \log a + \log b$

253 ×312 → 2,403 12 → +2,494 15 → 4,897 27 → = 78 936

② PUISSANCE

$N = a^n \iff \log N = n.\log a$

9^4 → 0,954 24 ×4 → 3,816 96 → = 6 561

③ DIVISION

$c = a:b \iff \log c = \log a - \log b$

480 : 6 → 2,681 24 → −0,778 15 → 1,903 09 → = 80

④ RACINE

$R = \sqrt[n]{a} \iff \log R = \frac{\log a}{n}$

$\sqrt[3]{72}$ → 1,857 33 :3 → 0,619 11 → = 4,160 2

log — LOGARITHMES

MANTISSES DES NOMBRES DE 500 à 999

Doc 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	698 97	699 84	700 70	701 57	702 43	703 29	704 15	705 01	705 86	706 72
51.	707 57	708 42	709 27	710 12	710 96	711 81	712 65	713 49	714 33	715 17
52.	716 00	716 84	717 67	718 50	719 33	720 16	720 99	721 81	722 63	723 46
53.	724 28	725 09	725 91	726 73	727 54	728 35	729 16	729 97	730 78	731 59
54.	732 39	733 20	734 00	734 80	735 60	736 40	737 19	737 99	738 78	739 57
55.	740 36	741 15	741 94	742 73	743 51	744 29	745 07	745 86	746 63	747 41
56.	748 19	748 96	749 74	750 51	751 28	752 05	752 82	753 58	754 35	755 11
57.	755 87	756 64	757 40	758 15	758 91	759 67	760 42	761 18	761 93	762 68
58.	763 43	764 18	764 92	765 67	766 41	767 16	767 90	768 64	769 38	770 12
59.	770 85	771 59	772 32	773 05	773 79	774 52	775 25	775 97	776 70	777 43
60.	778 15	778 87	779 60	780 32	781 04	781 76	782 47	783 19	783 90	784 62
61.	785 33	786 04	786 75	787 46	788 17	788 88	789 58	790 29	790 99	791 69
62.	792 39	793 09	793 79	794 49	795 18	795 88	796 57	797 27	797 96	798 65
63.	799 34	800 03	800 72	801 40	802 09	802 77	803 46	804 14	804 82	805 50
64.	806 18	806 86	807 54	808 21	808 89	809 56	810 23	810 90	811 58	812 24
65.	812 91	813 58	814 25	814 91	815 58	816 24	816 90	817 57	818 23	818 89
66.	819 54	820 20	820 86	821 51	822 17	822 82	823 47	824 13	824 78	825 43
67.	826 07	826 72	827 37	828 02	828 66	829 30	829 95	830 59	831 23	831 87
68.	832 51	833 15	833 78	834 42	835 06	835 69	836 32	836 96	837 59	838 22
69.	838 85	839 48	840 11	840 73	841 36	841 98	842 61	843 23	843 86	844 48
70.	845 10	845 72	846 34	846 96	847 57	848 19	848 80	849 42	850 03	850 65
71.	851 26	851 87	852 48	853 09	853 70	854 31	854 91	855 52	856 12	856 73
72.	857 33	857 94	858 54	859 14	859 74	860 34	860 94	861 53	862 13	862 73
73.	863 32	863 92	864 51	865 10	865 70	866 29	866 88	867 47	868 06	868 64
74.	869 23	869 82	870 40	870 99	871 57	872 16	872 74	873 32	873 90	874 48
75.	875 06	875 64	876 22	876 79	877 37	877 95	878 52	879 10	879 67	880 24
76.	880 81	881 38	881 95	882 52	883 09	883 66	884 23	884 80	885 36	885 93
77.	886 49	887 05	887 62	888 18	888 74	889 30	889 86	890 42	890 98	891 54
78.	892 09	892 65	893 21	893 76	894 32	894 87	895 42	895 97	896 53	897 08
79.	897 63	898 18	898 73	899 27	899 82	900 37	900 91	901 46	902 00	902 55
80.	903 09	903 63	904 17	904 72	905 26	905 80	906 34	906 87	907 41	907 95
81.	908 49	909 02	909 56	910 09	910 62	911 16	911 69	912 22	912 75	913 28
82.	913 81	914 34	914 87	915 40	915 93	916 45	916 98	917 51	918 03	918 55
83.	919 08	919 60	920 12	920 65	921 17	921 69	922 21	922 73	923 24	923 76
84.	924 28	924 80	925 31	925 83	926 34	926 86	927 37	927 88	928 40	928 91
85.	929 42	929 93	930 44	930 95	931 46	931 97	932 47	932 98	933 49	933 99
86.	934 50	935 00	935 51	936 01	936 51	937 02	937 52	938 02	938 52	939 02
87.	939 52	940 02	940 52	941 01	941 51	942 01	942 50	943 00	943 49	943 99
88.	944 48	944 98	945 47	945 96	946 45	946 94	947 43	947 92	948 41	948 90
89.	949 39	949 88	950 36	950 85	951 34	951 82	952 31	952 79	953 28	953 76
90.	954 24	954 72	955 21	955 69	956 17	956 65	957 13	957 61	958 09	958 56
91.	959 04	959 52	959 99	960 47	960 95	961 42	961 90	962 37	962 84	963 32
92.	963 79	964 26	964 73	965 20	965 67	966 14	966 61	967 08	967 55	968 02
93.	968 48	968 95	969 42	969 88	970 35	970 81	971 28	971 74	972 20	972 67
94.	973 13	973 59	974 05	974 51	974 97	975 43	975 89	976 35	976 81	977 27
95.	977 72	978 18	978 64	979 09	979 55	980 00	980 46	980 91	981 37	981 82
96.	982 27	982 72	983 18	983 63	984 08	984 53	984 98	985 43	985 88	986 32
97.	986 77	987 22	987 67	988 11	988 56	989 00	989 45	989 89	990 34	990 78
98.	991 23	991 67	992 11	992 55	993 00	993 44	993 88	994 32	994 76	995 20
99.	995 64	996 07	996 51	996 95	997 39	997 82	998 26	998 70	999 13	999 57

CALCUL DES NOMBRES RENARD (R) (raison $q = \sqrt[10]{10}$)

Puissances	1	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}
log.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Termes	1	1,2589	1,5849	1,9953	2,5119	3,1623	3,9811	5,0119	6,3096	7,9433	10
≈	1,00	1,25	1,60	2,00	2,50	3,15	4,00	5,00	6,30	8,00	10,00

Doc 17

TABLE DES CARRÉS

DES NOMBRES 0 à 499

N^2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1.	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2.	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3.	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4.	1 600	1 681	1 764	1 849	1 936	2 025	2 116	2 209	2 304	2 401
5.	2 500	2 601	2 704	2 809	2 916	3 025	3 136	3 249	3 364	3 481
6.	3 600	3 721	3 844	3 969	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761
7.	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	5 776	5 929	6 084	6 241
8.	6 400	6 561	6 724	6 889	7 056	7 225	7 396	7 569	7 744	7 921
9.	8 100	8 281	8 464	8 649	8 836	9 025	9 216	9 409	9 604	9 801
10.	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11.	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12.	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13.	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14.	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15.	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16.	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17.	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18.	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19.	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20.	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21.	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22.	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23.	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24.	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25.	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26.	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27.	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28.	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29.	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30.	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31.	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32.	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33.	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34.	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35.	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36.	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37.	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38.	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39.	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40.	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41.	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42.	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43.	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44.	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45.	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46.	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47.	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48.	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49.	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001

CARRÉ DE 10 N, 100 N....,

① Carrés des puissances de 10

doubler le nombre de zéros

$10^2 = 100$

$100^2 = 10\,000$

$1000^2 = 1\,000\,000$

② Carré d'un nombre de 3 chiffres

lire la table

Ex: $135^2 = 18\,225$

③ Carré d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs

Ex: $1340^2 = 134^2 \times 10^2 = 1\,795\,600$

$2500^2 = 25^2 \times 100^2 = 6\,250\,000$

④ Carré d'un nombre quelconque

Ex: $6253^2 \approx 6250^2 \approx 39\,062\,500$

N^2 TABLE DES CARRÉS

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 18

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016	255 025	256 036	257 049	258 064	259 081
51.	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361
52.	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841
53.	280 900	281 961	283 024	284 089	285 156	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521
54.	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401
55.	302 500	303 601	304 704	305 809	306 916	308 025	309 136	310 249	311 364	312 481
56.	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761
57.	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241
58.	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921
59.	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801
60.	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881
61.	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161
62.	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641
63.	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321
64.	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201
65.	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281
66.	435 600	436 921	438 244	439 569	440 896	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561
67.	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041
68.	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721
69.	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636	483 025	484 416	485 809	487 204	488 601
70.	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681
71.	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961
72.	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441
73.	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121
74.	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536	555 025	556 516	558 009	559 504	561 001
75.	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081
76.	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361
77.	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841
78.	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521
79.	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401
80.	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481
81.	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761
82.	672 400	674 041	675 684	677 329	678 976	680 625	682 276	683 929	685 584	687 241
83.	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556	697 225	698 896	700 569	702 244	703 921
84.	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801
85.	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881
86.	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161
87.	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641
88.	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456	783 225	784 996	786 769	788 544	790 321
89.	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201
90.	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281
91.	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561
92.	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041
93.	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721
94.	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136	893 025	894 916	896 809	898 704	900 601
95.	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681
96.	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961
97.	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441
98.	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121
99.	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001

① CARRÉS DES NOMBRES DÉCIMAUX

Exemple:

$12{,}6^2 = 153{,}76$

carré de 126,

(2 chiffres décimaux)

Ne pas tenir compte de la virgule et effectuer le carré.

Séparer, à droite, un nombre double de chiffres décimaux:

2 si le nombre en comporte 1

4 — — — — — — — — 2

6 — — — — — — — — 3

— — —

Exemple:

$3{,}14^2 = 9{,}8596$

carré de 314,

(4 chiffres décimaux)

Doc 19

TABLE DES RACINES CARRÉES

DES NOMBRES 0 à 499

$\sqrt{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,0000	1,0000	1,4142	1,7321	2,0000	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284	3,0000
1.	3,1623	3,3166	3,4641	3,6056	3,7417	3,8730	4,0000	4,1231	4,2426	4,3589
2.	4,4721	4,5826	4,6904	4,7958	4,8990	5,0000	5,0990	5,1962	5,2915	5,3852
3.	5,4772	5,5678	5,6569	5,7446	5,8310	5,9161	6,0000	6,0828	6,1644	6,2450
4.	6,3246	6,4031	6,4807	6,5574	6,6332	6,7082	6,7823	6,8557	6,9282	7,0000
5.	7,0711	7,1414	7,2111	7,2801	7,3485	7,4162	7,4833	7,5498	7,6158	7,6811
6.	7,7460	7,8102	7,8740	7,9373	8,0000	8,0623	8,1240	8,1854	8,2462	8,3066
7.	8,3666	8,4261	8,4853	8,5440	8,6023	8,6603	8,7178	8,7750	8,8318	8,8882
8.	8,9443	9,0000	9,0554	9,1104	9,1652	9,2195	9,2736	9,3274	9,3808	9,4340
9.	9,4868	9,5394	9,5917	9,6437	9,6954	9,7468	9,7980	9,8489	9,8995	9,9499
10.	10,0000	10,0499	10,0995	10,1489	10,1980	10,2470	10,2956	10,3441	10,3923	10,4403
11.	10,4881	10,5357	10,5830	10,6301	10,6771	10,7238	10,7703	10,8167	10,8628	10,9087
12.	10,9545	11,0000	11,0454	11,0905	11,1355	11,1803	11,2250	11,2694	11,3137	11,3578
13.	11,4018	11,4455	11,4891	11,5326	11,5758	11,6190	11,6619	11,7047	11,7473	11,7898
14.	11,8322	11,8743	11,9164	11,9583	12,0000	12,0416	12,0830	12,1244	12,1655	12,2066
15.	12,2474	12,2882	12,3288	12,3693	12,4097	12,4499	12,4900	12,5300	12,5698	12,6095
16.	12,6491	12,6886	12,7279	12,7671	12,8062	12,8452	12,8841	12,9228	12,9615	13,0000
17.	13,0384	13,0767	13,1149	13,1529	13,1909	13,2288	13,2665	13,3041	13,3417	13,3791
18.	13,4164	13,4536	13,4907	13,5277	13,5647	13,6015	13,6382	13,6748	13,7113	13,7477
19.	13,7840	13,8203	13,8564	13,8924	13,9284	13,9642	14,0000	14,0357	14,0712	14,1067
20.	14,1421	14,1774	14,2127	14,2478	14,2829	14,3178	14,3527	14,3875	14,4222	14,4568
21.	14,4914	14,5258	14,5602	14,5945	14,6287	14,6629	14,6969	14,7309	14,7648	14,7986
22.	14,8324	14,8661	14,8997	14,9332	14,9666	15,0000	15,0333	15,0665	15,0997	15,1327
23.	15,1658	15,1987	15,2315	15,2643	15,2971	15,3297	15,3623	15,3948	15,4272	15,4596
24.	15,4919	15,5242	15,5563	15,5885	15,6205	15,6525	15,6844	15,7162	15,7480	15,7797
25.	15,8114	15,8430	15,8745	15,9060	15,9374	15,9687	16,0000	16,0312	16,0624	16,0935
26.	16,1245	16,1555	16,1864	16,2173	16,2481	16,2788	16,3095	16,3401	16,3707	16,4012
27.	16,4317	16,4621	16,4924	16,5227	16,5529	16,5831	16,6132	16,6433	16,6733	16,7033
28.	16,7332	16,7631	16,7929	16,8226	16,8523	16,8819	16,9115	16,9411	16,9706	17,0000
29.	17,0294	17,0587	17,0880	17,1172	17,1464	17,1756	17,2047	17,2337	17,2627	17,2916
30.	17,3205	17,3494	17,3781	17,4069	17,4356	17,4642	17,4929	17,5214	17,5499	17,5784
31.	17,6068	17,6352	17,6635	17,6918	17,7200	17,7482	17,7764	17,8045	17,8326	17,8606
32.	17,8885	17,9165	17,9444	17,9722	18,0000	18,0278	18,0555	18,0831	18,1108	18,1384
33.	18,1659	18,1934	18,2209	18,2483	18,2757	18,3030	18,3303	18,3576	18,3848	18,4120
34.	18,4391	18,4662	18,4932	18,5203	18,5472	18,5742	18,6011	18,6279	18,6548	18,6815
35.	18,7083	18,7350	18,7617	18,7883	18,8149	18,8414	18,8680	18,8944	18,9209	18,9473
36.	18,9737	19,0000	19,0263	19,0526	19,0788	19,1050	19,1311	19,1572	19,1833	19,2094
37.	19,2354	19,2614	19,2873	19,3132	19,3391	19,3649	19,3907	19,4165	19,4422	19,4679
38.	19,4936	19,5192	19,5448	19,5704	19,5959	19,6214	19,6469	19,6723	19,6977	19,7231
39.	19,7484	19,7737	19,7990	19,8242	19,8494	19,8746	19,8997	19,9249	19,9499	19,9750
40.	20,0000	20,0250	20,0499	20,0749	20,0998	20,1246	20,1494	20,1742	20,1990	20,2237
41.	20,2485	20,2731	20,2978	20,3224	20,3470	20,3715	20,3961	20,4206	20,4450	20,4695
42.	20,4939	20,5183	20,5426	20,5670	20,5913	20,6155	20,6398	20,6640	20,6882	20,7123
43.	20,7364	20,7605	20,7846	20,8087	20,8327	20,8567	20,8806	20,9045	20,9284	20,9523
44.	20,9762	21,0000	21,0238	21,0476	21,0713	21,0950	21,1187	21,1424	21,1660	21,1896
45.	21,2132	21,2368	21,2603	21,2838	21,3073	21,3307	21,3542	21,3776	21,4009	21,4243
46.	21,4476	21,4709	21,4942	21,5174	21,5407	21,5639	21,5870	21,6102	21,6333	21,6564
47.	21,6795	21,7025	21,7256	21,7486	21,7715	21,7945	21,8174	21,8403	21,8632	21,8861
48.	21,9089	21,9317	21,9545	21,9773	22,0000	22,0227	22,0454	22,0681	22,0907	22,1133
49.	22,1359	22,1585	22,1811	22,2036	22,2261	22,2486	22,2711	22,2935	22,3159	22,3383

RACINE CARRÉE DE 10 N . 100 N..... 0,1 N . 0,01 N

① Racine carrée des puissances de 10: diviser par 2 le nombre de zéros

$\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{10\,000} = 100$

② Racine carrée d'un nombre de 3 chiffres: lire dans la table.

Ex. $\sqrt{961} = 31$

③ Racine carrée d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs:

$\sqrt{12\,800} = \sqrt{128} \times \sqrt{100} = 113{,}137$

④ Racine carrée d'un nombre décimal.

Ex. $\sqrt{7{,}5} = \sqrt{\frac{750}{100}} = \frac{\sqrt{750}}{10} = 2{,}739$

TABLE DES RACINES CARRÉES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 20

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	22,3607	22,3830	22,4054	22,4277	22,4499	22,4722	22,4944	22,5167	22,5389	22,5610
51.	22,5832	22,6053	22,6274	22,6495	22,6716	22,6936	22,7156	22,7376	22,7596	22,7816
52.	22,8035	22,8254	22,8473	22,8692	22,8910	22,9129	22,9347	22,9565	22,9783	23,0000
53.	23,0217	23,0434	23,0651	23,0868	23,1084	23,1301	23,1517	23,1733	23,1948	23,2164
54.	23,2379	23,2594	23,2809	23,3024	23,3238	23,3452	23,3666	23,3880	23,4094	23,4307
55.	23,4521	23,4734	23,4947	23,5160	23,5372	23,5584	23,5797	23,6008	23,6220	23,6432
56.	23,6643	23,6854	23,7065	23,7276	23,7487	23,7697	23,7908	23,8118	23,8328	23,8537
57.	23,8747	23,8956	23,9165	23,9374	23,9583	23,9792	24,0000	24,0208	24,0416	24,0624
58.	24,0832	24,1039	24,1247	24,1454	24,1661	24,1868	24,2074	24,2281	24,2487	24,2693
59.	24,2899	24,3105	24,3311	24,3516	24,3721	24,3926	24,4131	24,4336	24,4540	24,4745
60.	24,4949	24,5153	24,5357	24,5561	24,5764	24,5967	24,6171	24,6374	24,6577	24,6779
61.	24,6982	24,7184	24,7386	24,7588	24,7790	24,7992	24,8193	24,8395	24,8596	24,8797
62.	24,8998	24,9199	24,9399	24,9600	24,9800	25,0000	25,0200	25,0400	25,0599	25,0799
63.	25,0998	25,1197	25,1396	25,1595	25,1794	25,1992	25,2190	25,2389	25,2587	25,2784
64.	25,2982	25,3180	25,3377	25,3574	25,3772	25,3969	25,4165	25,4362	25,4558	25,4755
65.	25,4951	25,5147	25,5343	25,5539	25,5734	25,5930	25,6125	25,6320	25,6515	25,6710
66.	25,6905	25,7099	25,7294	25,7488	25,7682	25,7876	25,8070	25,8263	25,8457	25,8650
67.	25,8844	25,9037	25,9230	25,9422	25,9615	25,9808	26,0000	26,0192	26,0384	26,0576
68.	26,0768	26,0960	26,1151	26,1343	26,1534	26,1725	26,1916	26,2107	26,2298	26,2488
69.	26,2679	26,2869	26,3059	26,3249	26,3439	26,3629	26,3818	26,4008	26,4197	26,4386
70.	26,4575	26,4764	26,4953	26,5141	26,5330	26,5518	26,5707	26,5895	26,6083	26,6271
71.	26,6458	26,6646	26,6833	26,7021	26,7208	26,7395	26,7582	26,7769	26,7955	26,8142
72.	26,8328	26,8514	26,8701	26,8887	26,9072	26,9258	26,9444	26,9629	26,9815	27,0000
73.	27,0185	27,0370	27,0555	27,0740	27,0924	27,1109	27,1293	27,1477	27,1662	27,1846
74.	27,2029	27,2213	27,2397	27,2580	27,2764	27,2947	27,3130	27,3313	27,3496	27,3679
75.	27,3861	27,4044	27,4226	27,4408	27,4591	27,4773	27,4955	27,5136	27,5318	27,5500
76.	27,5681	27,5862	27,6043	27,6225	27,6405	27,6586	27,6767	27,6948	27,7128	27,7308
77.	27,7489	27,7669	27,7849	27,8029	27,8209	27,8388	27,8568	27,8747	27,8927	27,9106
78.	27,9285	27,9464	27,9643	27,9821	28,0000	28,0179	28,0357	28,0535	28,0713	28,0891
79.	28,1069	28,1247	28,1425	28,1603	28,1780	28,1957	28,2135	28,2312	28,2489	28,2666
80.	28,2843	28,3019	28,3196	28,3373	28,3549	28,3725	28,3901	28,4077	28,4253	28,4429
81.	28,4605	28,4781	28,4956	28,5132	28,5307	28,5482	28,5657	28,5832	28,6007	28,6182
82.	28,6356	28,6531	28,6705	28,6880	28,7054	28,7228	28,7402	28,7576	28,7750	28,7924
83.	28,8097	28,8271	28,8444	28,8617	28,8791	28,8964	28,9137	28,9310	28,9482	28,9655
84.	28,9828	29,0000	29,0172	29,0345	29,0517	29,0689	29,0861	29,1033	29,1204	29,1376
85.	29,1548	29,1719	29,1890	29,2062	29,2233	29,2404	29,2575	29,2746	29,2916	29,3087
86.	29,3258	29,3428	29,3598	29,3769	29,3939	29,4109	29,4279	29,4449	29,4618	29,4788
87.	29,4958	29,5127	29,5296	29,5466	29,5635	29,5804	29,5973	29,6142	29,6311	29,6479
88.	29,6648	29,6816	29,6985	29,7153	29,7321	29,7489	29,7658	29,7825	29,7993	29,8161
89.	29,8329	29,8496	29,8664	29,8831	29,8998	29,9166	29,9333	29,9500	29,9666	29,9833
90.	30,0000	30,0167	30,0333	30,0500	30,0666	30,0832	30,0998	30,1164	30,1330	30,1496
91.	30,1662	30,1828	30,1993	30,2159	30,2324	30,2490	30,2655	30,2820	30,2985	30,3150
92.	30,3315	30,3480	30,3645	30,3809	30,3974	30,4138	30,4302	30,4467	30,4631	30,4795
93.	30,4959	30,5123	30,5287	30,5450	30,5614	30,5778	30,5941	30,6105	30,6268	30,6431
94.	30,6594	30,6757	30,6920	30,7083	30,7246	30,7409	30,7571	30,7734	30,7896	30,8058
95.	30,8221	30,8383	30,8545	30,8707	30,8869	30,9031	30,9192	30,9354	30,9516	30,9677
96.	30,9839	31,0000	31,0161	31,0322	31,0483	31,0644	31,0805	31,0966	31,1127	31,1288
97.	31,1448	31,1609	31,1769	31,1929	31,2090	31,2250	31,2410	31,2570	31,2730	31,2890
98.	31,3050	31,3209	31,3369	31,3528	31,3688	31,3847	31,4006	31,4166	31,4325	31,4484
99.	31,4643	31,4802	31,4960	31,5119	31,5278	31,5436	31,5595	31,5753	31,5911	31,6070

① EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE

Exemple:

6'25	25
4	45
225	5
225	225
0	

1. Partager en tranches de 2 chiffres en partant de la virgule
2. Extraire la racine de la 1ère tranche ($\sqrt{6} \approx 2$)
3. Soustraire de la 1ère tranche le carré de cette racine ($6-2^2=2$)
4. Abaisser à côté du reste la 2ème tranche. Isoler le premier chiffre à droite (22,5)
5. Diviser la tranche de gauche par 2 fois la racine ($22:4 \approx 5$)
6. Ecrire 5 à la droite de 4 et multiplier par 5
7. Retrancher de 225... ...etc...

Doc 21

TABLE DES CUBES

DES NOMBRES 1 à 499

N^3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
0.	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	0.
1.	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	1.
2.	8000	9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389	2.
3.	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319	3.
4.	64000	68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649	4.
5.	125000	132651	140608	148877	157464	166375	175616	185193	195112	205379	5.
6.	216000	226981	238328	250047	262144	274625	287496	300763	314432	328509	6.
7.	343000	357911	373248	389017	405224	421875	438976	456533	474552	493039	7.
8.	512000	531441	551368	571787	592704	614125	636056	658503	681472	704969	8.
9.	729000	753571	778688	804357	830584	857375	884736	912673	941192	970299	9.
10.	1000000	1030301	1061208	1092727	1124864	1157625	1191016	1225043	1259712	1295029	10.
11.	1331000	1367631	1404928	1442897	1481544	1520875	1560896	1601613	1643032	1685159	11.
12.	1728000	1771561	1815848	1860867	1906624	1953125	2000376	2048383	2097152	2146689	12.
13.	2197000	2248091	2299968	2352637	2406104	2460375	2515456	2571353	2628072	2685619	13.
14.	2744000	2803221	2863288	2924207	2985984	3048625	3112136	3176523	3241792	3307949	14.
15.	3375000	3442951	3511808	3581577	3652264	3723875	3796416	3869893	3944312	4019679	15.
16.	4096000	4173281	4251528	4330747	4410944	4492125	4574296	4657463	4741632	4826809	16.
17.	4913000	5000211	5088448	5177717	5268024	5359375	5451776	5545233	5639752	5735339	17.
18.	5832000	5929741	6028568	6128487	6229504	6331625	6434856	6539203	6644672	6751269	18.
19.	6859000	6967871	7077888	7189057	7301384	7414875	7529536	7645373	7762392	7880599	19.
20.	8000000	8120601	8242408	8365427	8489664	8615125	8741816	8869743	8998912	9129329	20.
21.	9261000	9393931	9528128	9663597	9800344	9938375	10077696	10218313	10360232	10503459	21.
22.	10648000	10793861	10941048	11089567	11239424	11390625	11543176	11697083	11852352	12008989	22.
23.	12167000	12326391	12487168	12649337	12812904	12977875	13144256	13312053	13481272	13651919	23.
24.	13824000	13997521	14172488	14348907	14526784	14706125	14886936	15069223	15252992	15438249	24.
25.	15625000	15813251	16003008	16194277	16387064	16581375	16777216	16974593	17173512	17373979	25.
26.	17576000	17779581	17984728	18191447	18399744	18609625	18821096	19034163	19248832	19465109	26.
27.	19683000	19902511	20123648	20346417	20570824	20796875	21024576	21253933	21484952	21717639	27.
28.	21952000	22188041	22425768	22665187	22906304	23149125	23393656	23639903	23887872	24137569	28.
29.	24389000	24642171	24897088	25153757	25412184	25672375	25934336	26198073	26463592	26730899	29.
30.	27000000	27270901	27543608	27818127	28094464	28372625	28652616	28934443	29218112	29503629	30.
31.	29791000	30080231	30371328	30664297	30959144	31255875	31554496	31855013	32157432	32461759	31.
32.	32768000	33076161	33386248	33698267	34012224	34328125	34645976	34965783	35287552	35611289	32.
33.	35937000	36264691	36594368	36926037	37259704	37595375	37933056	38272753	38614472	38958219	33.
34.	39304000	39651821	40001688	40353607	40707584	41063625	41421736	41781923	42144192	42508549	34.
35.	42875000	43243551	43614208	43986977	44361864	44738875	45118016	45499293	45882712	46268279	35.
36.	46656000	47045881	47437928	47832147	48228544	48627125	49027896	49430863	49836032	50243409	36.
37.	50653000	51064811	51478848	51895117	52313624	52734375	53157376	53582633	54010152	54439939	37.
38.	54872000	55306341	55742968	56181887	56623104	57066625	57512456	57960603	58411072	58863869	38.
39.	59319000	59776471	60236288	60698457	61162984	61629875	62099136	62570773	63044792	63521199	39.
40.	64000000	64481201	64964808	65450827	65939264	66430125	66923416	67419143	67917312	68417929	40.
41.	68921000	69426531	69934528	70444997	70957944	71473375	71991296	72511713	73034632	73560059	41.
42.	74088000	74618461	75151448	75686967	76225024	76765625	77308776	77854483	78402752	78953589	42.
43.	79507000	80062991	80621568	81182737	81746504	82312875	82881856	83453453	84027672	84604519	43.
44.	85184000	85766121	86350888	86938307	87528384	88121125	88716536	89314623	89915392	90518849	44.
45.	91125000	91733851	92345408	92959677	93576664	94196375	94818816	95443993	96071912	96702579	45.
46.	97336000	97972181	98611128	99252847	99897344	100544625	101194696	101847563	102503232	103161709	46.
47.	103823000	104487111	105154048	105823817	106496424	107171875	107850176	108531333	109215352	109902239	47.
48.	110592000	111284641	111980168	112678587	113379904	114084125	114791256	115501303	116214272	116930169	48.
49.	117649000	118370771	119095488	119823157	120553784	121287375	122023936	122763473	123505992	124251499	49.

N^3 TABLE DES CUBES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 22

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
50.	125 000 000	125 751 501	126 506 008	127 263 527	128 024 064	128 787 625	129 554 216	130 323 843	131 096 512	131 872 229	50.
51.	132 651 000	133 432 831	134 217 728	135 005 697	135 796 744	136 590 875	137 388 096	138 188 413	138 991 832	139 798 359	51.
52.	140 608 000	141 420 761	142 236 648	143 055 667	143 877 824	144 703 125	145 531 576	146 363 183	147 197 952	148 035 889	52.
53.	148 877 000	149 721 291	150 568 768	151 419 437	152 273 304	153 130 375	153 990 656	154 854 153	155 720 872	156 590 819	53.
54.	157 464 000	158 340 421	159 220 088	160 103 007	160 989 184	161 878 625	162 771 336	163 667 323	164 566 592	165 469 149	54.
55.	166 375 000	167 284 151	168 196 608	169 112 377	170 031 464	170 953 875	171 879 616	172 808 693	173 741 112	174 676 879	55.
56.	175 616 000	176 558 481	177 504 328	178 453 547	179 406 144	180 362 125	181 321 496	182 284 263	183 250 432	184 220 009	56.
57.	185 193 000	186 169 411	187 149 248	188 132 517	189 119 224	190 109 375	191 102 976	192 100 033	193 100 552	194 104 539	57.
58.	195 112 000	196 122 941	197 137 368	198 155 287	199 176 704	200 201 625	201 230 056	202 262 003	203 297 472	204 336 469	58.
59.	205 379 000	206 425 071	207 474 688	208 527 857	209 584 584	210 644 875	211 708 736	212 776 173	213 847 192	214 921 799	59.
60.	216 000 000	217 081 801	218 167 208	219 256 227	220 348 864	221 445 125	222 545 016	223 648 543	224 755 712	225 866 529	60.
61.	226 981 000	228 099 131	229 220 928	230 346 397	231 475 544	232 608 375	233 744 896	234 885 113	236 029 032	237 176 659	61.
62.	238 328 000	239 483 061	240 641 848	241 804 367	242 970 624	244 140 625	245 314 376	246 491 883	247 673 152	248 858 189	62.
63.	250 047 000	251 239 591	252 435 968	253 636 137	254 840 104	256 047 875	257 259 456	258 474 853	259 694 072	260 917 119	63.
64.	262 144 000	263 374 721	264 609 288	265 847 707	267 089 984	268 336 125	269 586 136	270 840 023	272 097 792	273 359 449	64.
65.	274 625 000	275 894 451	277 167 808	278 445 077	279 726 264	281 011 375	282 300 416	283 593 393	284 890 312	286 191 179	65.
66.	287 496 000	288 804 781	290 117 528	291 434 247	292 754 944	294 079 625	295 408 296	296 740 963	298 077 632	299 418 309	66.
67.	300 763 000	302 111 711	303 464 448	304 821 217	306 182 024	307 546 875	308 915 776	310 288 733	311 665 752	313 046 839	67.
68.	314 432 000	315 821 241	317 214 568	318 611 987	320 013 504	321 419 125	322 828 856	324 242 703	325 660 672	327 082 769	68.
69.	328 509 000	329 939 371	331 373 888	332 812 557	334 255 384	335 702 375	337 153 536	338 608 873	340 068 392	341 532 099	69.
70.	343 000 000	344 472 101	345 948 408	347 428 927	348 913 664	350 402 625	351 895 816	353 393 243	354 894 912	356 400 829	70.
71.	357 911 000	359 425 431	360 944 128	362 467 097	363 994 344	365 525 875	367 061 696	368 601 813	370 146 232	371 694 959	71.
72.	373 248 000	374 805 361	376 367 048	377 933 067	379 503 424	381 078 125	382 657 176	384 240 583	385 828 352	387 420 489	72.
73.	389 017 000	390 617 891	392 223 168	393 832 837	395 446 904	397 065 375	398 688 256	400 315 553	401 947 272	403 583 419	73.
74.	405 224 000	406 869 021	408 518 488	410 172 407	411 830 784	413 493 625	415 160 936	416 832 723	418 508 992	420 189 749	74.
75.	421 875 000	423 564 751	425 259 008	426 957 777	428 661 064	430 368 875	432 081 216	433 798 093	435 519 512	437 245 479	75.
76.	438 976 000	440 711 081	442 450 728	444 194 947	445 943 744	447 697 125	449 455 096	451 217 663	452 984 832	454 756 609	76.
77.	456 533 000	458 314 011	460 099 648	461 889 917	463 684 824	465 484 375	467 288 576	469 097 433	470 910 952	472 729 139	77.
78.	474 552 000	476 379 541	478 211 768	480 048 687	481 890 304	483 736 625	485 587 656	487 443 403	489 303 872	491 169 069	78.
79.	493 039 000	494 913 671	496 793 088	498 677 257	500 566 184	502 459 875	504 358 336	506 261 573	508 169 592	510 082 399	79.
80.	512 000 000	513 922 401	515 849 608	517 781 627	519 718 464	521 660 125	523 606 616	525 557 943	527 514 112	529 475 129	80.
81.	531 441 000	533 411 731	535 387 328	537 367 797	539 353 144	541 343 375	543 338 496	545 338 513	547 343 432	549 353 259	81.
82.	551 368 000	553 387 661	555 412 248	557 441 767	559 476 224	561 515 625	563 559 976	565 609 283	567 663 552	569 722 789	82.
83.	571 787 000	573 856 191	575 930 368	578 009 537	580 093 704	582 182 875	584 277 056	586 376 253	588 480 472	590 589 719	83.
84.	592 704 000	594 823 321	596 947 888	599 077 707	601 211 784	603 351 125	605 495 736	607 645 423	609 800 192	611 960 049	84.
85.	614 125 000	616 295 051	618 470 208	620 650 477	622 835 864	625 026 375	627 222 016	629 422 793	631 628 712	633 839 779	85.
86.	636 056 000	638 277 381	640 503 928	642 735 647	644 972 544	647 214 625	649 461 896	651 714 363	653 972 032	656 234 909	86.
87.	658 503 000	660 776 311	663 054 848	665 338 617	667 627 624	669 921 875	672 221 376	674 526 133	676 836 152	679 151 439	87.
88.	681 472 000	683 797 841	686 128 968	688 465 387	690 807 104	693 154 125	695 506 456	697 864 103	700 227 072	702 595 369	88.
89.	704 969 000	707 347 971	709 732 288	712 121 957	714 516 984	716 917 375	719 323 136	721 734 273	724 150 792	726 572 699	89.
90.	729 000 000	731 432 701	733 870 808	736 314 327	738 763 264	741 217 625	743 677 416	746 142 643	748 613 312	751 089 429	90.
91.	753 571 000	756 058 031	758 550 528	761 048 497	763 551 944	766 060 875	768 575 296	771 095 213	773 620 632	776 151 559	91.
92.	778 688 000	781 229 961	783 777 448	786 330 467	788 889 024	791 453 125	794 022 776	796 597 983	799 178 752	801 765 089	92.
93.	804 357 000	806 954 491	809 557 568	812 166 237	814 780 504	817 400 375	820 025 856	822 656 953	825 293 672	827 936 019	93.
94.	830 584 000	833 237 621	835 896 888	838 561 807	841 232 384	843 908 625	846 590 536	849 278 123	851 971 392	854 670 349	94.
95.	857 375 000	860 085 351	862 801 408	865 523 177	868 250 664	870 983 875	873 722 816	876 467 493	879 217 912	881 974 079	95.
96.	884 736 000	887 503 681	890 277 128	893 056 343	895 841 344	898 632 125	901 428 696	904 231 063	907 039 232	909 853 209	96.
97.	912 673 000	915 498 611	918 330 048	921 167 317	924 010 424	926 859 375	929 714 176	932 574 833	935 441 352	938 313 739	97.
98.	941 192 000	944 076 141	946 966 168	949 862 087	952 763 904	955 671 625	958 585 256	961 504 803	964 430 272	967 361 669	98.
99.	970 299 000	973 242 271	976 191 488	979 146 657	982 107 784	985 074 875	988 047 936	991 026 973	994 011 992	997 002 999	99.
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N

Doc 23 — TABLE DES RACINES CUBIQUES

DES NOMBRES 1 à 499

$\sqrt[3]{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	1,0000	1,2599	1,4422	1,5874	1,7100	1,8171	1,9129	2,0000	2,0801
1.	2,1544	2,2240	2,2894	2,3513	2,4101	2,4662	2,5198	2,5713	2,6207	2,6684
2.	2,7144	2,7589	2,8020	2,8439	2,8845	2,9240	2,9625	3,0000	3,0366	3,0723
3.	3,1072	3,1414	3,1748	3,2075	3,2396	3,2711	3,3019	3,3322	3,3620	3,3912
4.	3,4200	3,4482	3,4760	3,5034	3,5303	3,5569	3,5830	3,6088	3,6342	3,6593
5.	3,6840	3,7084	3,7325	3,7563	3,7798	3,8030	3,8259	3,8485	3,8709	3,8930
6.	3,9149	3,9365	3,9579	3,9791	4,0000	4,0207	4,0412	4,0615	4,0817	4,1016
7.	4,1213	4,1408	4,1602	4,1793	4,1983	4,2172	4,2358	4,2543	4,2727	4,2908
8.	4,3089	4,3267	4,3445	4,3621	4,3795	4,3968	4,4140	4,4310	4,4480	4,4647
9.	4,4814	4,4979	4,5144	4,5307	4,5468	4,5629	4,5789	4,5947	4,6104	4,6261
10.	4,6416	4,6570	4,6723	4,6875	4,7027	4,7177	4,7326	4,7475	4,7622	4,7769
11.	4,7914	4,8059	4,8203	4,8346	4,8488	4,8629	4,8770	4,8910	4,9049	4,9187
12.	4,9324	4,9461	4,9597	4,9732	4,9866	5,0000	5,0133	5,0265	5,0397	5,0528
13.	5,0658	5,0788	5,0916	5,1045	5,1172	5,1299	5,1426	5,1551	5,1676	5,1801
14.	5,1925	5,2048	5,2171	5,2293	5,2415	5,2536	5,2656	5,2776	5,2896	5,3015
15.	5,3133	5,3251	5,3368	5,3485	5,3601	5,3717	5,3832	5,3947	5,4061	5,4175
16.	5,4288	5,4401	5,4514	5,4626	5,4737	5,4848	5,4959	5,5069	5,5178	5,5288
17.	5,5397	5,5505	5,5613	5,5721	5,5828	5,5934	5,6041	5,6147	5,6252	5,6357
18.	5,6462	5,6567	5,6671	5,6774	5,6877	5,6980	5,7083	5,7185	5,7287	5,7388
19.	5,7489	5,7590	5,7690	5,7790	5,7890	5,7989	5,8088	5,8186	5,8285	5,8383
20.	5,8480	5,8578	5,8675	5,8771	5,8868	5,8964	5,9059	5,9155	5,9250	5,9345
21.	5,9439	5,9533	5,9627	5,9721	5,9814	5,9907	6,0000	6,0092	6,0185	6,0277
22	6,0368	6,0459	6,0550	6,0641	6,0732	6,0822	6,0912	6,1002	6,1091	6,1180
23.	6,1269	6,1358	6,1446	6,1534	6,1622	6,1710	6,1797	6,1885	6,1972	6,2058
24.	6,2145	6,2231	6,2317	6,2403	6,2488	6,2573	6,2658	6,2743	6,2828	6,2912
25	6,2996	6,3080	6,3164	6,3247	6,3330	6,3413	6,3496	6,3579	6,3661	6,3743
26.	6,3825	6,3907	6,3988	6,4070	6,4151	6,4232	6,4312	6,4393	6,4473	6,4553
27.	6,4633	6,4713	6,4792	6,4872	6,4951	6,5030	6,5108	6,5187	6,5265	6,5343
28.	6,5421	6,5499	6,5577	6,5654	6,5731	6,5808	6,5885	6,5962	6,6039	6,6115
29.	6,6191	6,6267	6,6343	6,6419	6,6494	6,6569	6,6644	6,6719	6,6794	6,6869
30.	6,6943	6,7018	6,7092	6,7166	6,7240	6,7313	6,7387	6,7460	6,7533	6,7606
31.	6,7679	6,7752	6,7824	6,7897	6,7969	6,8041	6,8113	6,8185	6,8256	6,8328
32.	6,8399	6,8470	6,8541	6,8612	6,8683	6,8753	6,8824	6,8894	6,8964	6,9034
33.	6,9104	6,9174	6,9244	6,9313	6,9382	6,9451	6,9521	6,9589	6,9658	6,9727
34.	6,9795	6,9864	6,9932	7,0000	7,0068	7,0136	7,0203	7,0271	7,0338	7,0406
35.	7,0473	7,0540	7,0607	7,0674	7,0740	7,0807	7,0873	7,0940	7,1006	7,1072
36.	7,1138	7,1204	7,1269	7,1335	7,1400	7,1466	7,1531	7,1596	7,1661	7,1726
37.	7,1791	7,1855	7,1920	7,1984	7,2048	7,2112	7,2177	7,2240	7,2304	7,2368
38.	7,2432	7,2495	7,2558	7,2622	7,2685	7,2748	7,2811	7,2874	7,2936	7,2999
39.	7,3061	7,3124	7,3186	7,3248	7,3310	7,3372	7,3434	7,3496	7,3558	7,3619
40.	7,3681	7,3742	7,3803	7,3864	7,3925	7,3986	7,4047	7,4108	7,4169	7,4229
41.	7,4290	7,4350	7,4410	7,4470	7,4530	7,4590	7,4650	7,4710	7,4770	7,4829
42.	7,4889	7,4948	7,5007	7,5067	7,5126	7,5185	7,5244	7,5302	7,5361	7,5420
43.	7,5478	7,5537	7,5595	7,5654	7,5712	7,5770	7,5828	7,5886	7,5944	7,6001
44.	7,6059	7,6117	7,6174	7,6232	7,6289	7,6346	7,6403	7,6460	7,6517	7,6574
45.	7,6631	7,6688	7,6744	7,6801	7,6857	7,6914	7,6970	7,7026	7,7082	7,7138
46.	7,7194	7,7250	7,7306	7,7362	7,7418	7,7473	7,7529	7,7584	7,7639	7,7695
47.	7,7750	7,7805	7,7860	7,7915	7,7970	7,8025	7,8079	7,8134	7,8188	7,8243
48.	7,8297	7,8352	7,8406	7,8460	7,8514	7,8568	7,8622	7,8676	7,8730	7,8784
49.	7,8837	7,8891	7,8944	7,8998	7,9051	7,9105	7,9158	7,9211	7,9264	7,9317

$$\sqrt[3]{N} = a \quad \text{si} \quad a^3 = N$$

① Racine cubique des puissances de 10: *diviser par 3 le nombre de 0*

$\sqrt[3]{1000} = 10 \qquad \sqrt[3]{1000\,000} = 100$

② Racine cubique d'un nombre de 3 chiffres: *lire dans la table*

$\sqrt[3]{490} = 7,8837$

③ Racine cubique d'un nombre ayant 3 chiffres significatifs:

$\sqrt[3]{375\,000} = \sqrt[3]{375} \times \sqrt[3]{1000} = 72,112$

④ Racine cubique d'un nombre décimal

$\sqrt[3]{0,236} = \sqrt{\frac{236}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{236}}{10} = 0,618\,85$

$\sqrt[3]{N}$ TABLE DES RACINES CUBIQUES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 24

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50.	7,9370	7,9423	7,9476	7,9528	7,9581	7,9634	7,9686	7,9739	7,9791	7,9843
51.	7,9896	7,9948	8,0000	8,0052	8,0104	8,0156	8,0208	8,0260	8,0311	8,0363
52.	8,0415	8,0466	8,0517	8,0569	8,0620	8,0671	8,0723	8,0774	8,0825	8,0876
53.	8,0927	8,0978	8,1028	8,1079	8,1130	8,1180	8,1231	8,1281	8,1332	8,1382
54.	8,1433	8,1483	8,1533	8,1583	8,1633	8,1683	8,1733	8,1783	8,1833	8,1882
55.	8,1932	8,1982	8,2031	8,2081	8,2130	8,2180	8,2229	8,2278	8,2327	8,2377
56.	8,2426	8,2475	8,2524	8,2573	8,2621	8,2670	8,2719	8,2768	8,2816	8,2865
57.	8,2913	8,2962	8,3010	8,3059	8,3107	8,3155	8,3203	8,3251	8,3300	8,3348
58.	8,3396	8,3443	8,3491	8,3539	8,3587	8,3634	8,3682	8,3730	8,3777	8,3825
59.	8,3872	8,3919	8,3967	8,4014	8,4061	8,4108	8,4155	8,4202	8,4249	8,4296
60.	8,4343	8,4390	8,4437	8,4484	8,4530	8,4577	8,4623	8,4670	8,4716	8,4763
61.	8,4809	8,4856	8,4902	8,4948	8,4994	8,5040	8,5086	8,5132	8,5178	8,5224
62.	8,5270	8,5316	8,5362	8,5408	8,5453	8,5499	8,5544	8,5590	8,5635	8,5681
63.	8,5726	8,5772	8,5817	8,5862	8,5907	8,5952	8,5997	8,6043	8,6088	8,6132
64.	8,6177	8,6222	8,6267	8,6312	8,6357	8,6401	8,6446	8,6490	8,6535	8,6579
65.	8,6624	8,6668	8,6713	8,6757	8,6801	8,6845	8,6890	8,6934	8,6978	8,7022
66.	8,7066	8,7110	8,7154	8,7198	8,7241	8,7285	8,7329	8,7373	8,7416	8,7460
67.	8,7503	8,7547	8,7590	8,7634	8,7677	8,7721	8,7764	8,7807	8,7850	8,7893
68.	8,7937	8,7980	8,8023	8,8066	8,8109	8,8152	8,8194	8,8237	8,8280	8,8323
69.	8,8366	8,8408	8,8451	8,8493	8,8536	8,8578	8,8621	8,8663	8,8706	8,8748
70.	8,8790	8,8833	8,8875	8,8917	8,8959	8,9001	8,9043	8,9085	8,9127	8,9169
71.	8,9211	8,9253	8,9295	8,9337	8,9378	8,9420	8,9462	8,9503	8,9545	8,9587
72.	8,9628	8,9670	8,9711	8,9752	8,9794	8,9835	8,9876	8,9918	8,9959	9,0000
73.	9,0041	9,0082	9,0123	9,0164	9,0205	9,0246	9,0287	9,0328	9,0369	9,0410
74.	9,0450	9,0491	9,0532	9,0572	9,0613	9,0654	9,0694	9,0735	9,0775	9,0816
75.	9,0856	9,0896	9,0937	9,0977	9,1017	9,1057	9,1098	9,1138	9,1178	9,1218
76.	9,1258	9,1298	9,1338	9,1378	9,1418	9,1458	9,1498	9,1537	9,1577	9,1617
77.	9,1657	9,1696	9,1736	9,1775	9,1815	9,1855	9,1894	9,1933	9,1973	9,2012
78.	9,2052	9,2091	9,2130	9,2170	9,2209	9,2248	9,2287	9,2326	9,2365	9,2404
79.	9,2443	9,2482	9,2521	9,2560	9,2599	9,2638	9,2677	9,2716	9,2754	9,2793
80.	9,2832	9,2870	9,2909	9,2948	9,2986	9,3025	9,3063	9,3102	9,3140	9,3179
81.	9,3217	9,3255	9,3294	9,3332	9,3370	9,3408	9,3447	9,3485	9,3523	9,3561
82.	9,3599	9,3637	9,3675	9,3713	9,3751	9,3789	9,3827	9,3865	9,3902	9,3940
83.	9,3978	9,4016	9,4053	9,4091	9,4129	9,4166	9,4204	9,4241	9,4279	9,4316
84.	9,4354	9,4391	9,4429	9,4466	9,4503	9,4541	9,4578	9,4615	9,4652	9,4690
85.	9,4727	9,4764	9,4801	9,4838	9,4875	9,4912	9,4949	9,4986	9,5023	9,5060
86.	9,5097	9,5134	9,5171	9,5207	9,5244	9,5281	9,5317	9,5354	9,5391	9,5427
87.	9,5464	9,5501	9,5537	9,5574	9,5610	9,5647	9,5683	9,5719	9,5756	9,5792
88.	9,5828	9,5865	9,5901	9,5937	9,5973	9,6010	9,6046	9,6082	9,6118	9,6154
89.	9,6190	9,6226	9,6262	9,6298	9,6334	9,6370	9,6406	9,6442	9,6477	9,6513
90.	9,6549	9,6585	9,6620	9,6656	9,6692	9,6727	9,6763	9,6799	9,6834	9,6870
91.	9,6905	9,6941	9,6976	9,7012	9,7047	9,7082	9,7118	9,7153	9,7188	9,7224
92.	9,7259	9,7294	9,7329	9,7364	9,7400	9,7435	9,7470	9,7505	9,7540	9,7575
93.	9,7610	9,7645	9,7680	9,7715	9,7750	9,7785	9,7819	9,7854	9,7889	9,7924
94.	9,7959	9,7993	9,8028	9,8063	9,8097	9,8132	9,8167	9,8201	9,8236	9,8270
95.	9,8305	9,8339	9,8374	9,8408	9,8443	9,8477	9,8511	9,8546	9,8580	9,8614
96.	9,8648	9,8683	9,8717	9,8751	9,8785	9,8819	9,8854	9,8888	9,8922	9,8956
97.	9,8990	9,9024	9,9058	9,9092	9,9126	9,9160	9,9194	9,9227	9,9261	9,9295
98.	9,9329	9,9363	9,9396	9,9430	9,9464	9,9497	9,9531	9,9565	9,9598	9,9632
99.	9,9666	9,9699	9,9733	9,9766	9,9800	9,9833	9,9866	9,9900	9,9933	9,9967

UTILISATION DE LA TABLE

Calcul du diamètre d'une sphère connaissant son volume

Formule

$V = \frac{\pi \times d^3}{6}$

(voir Doc 43)

$\left(\text{avec } \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}132\right)$

$d^3 = \frac{V \times 6}{\pi}$

$= V \times \frac{6}{\pi}$

$d = \sqrt[3]{V} \times \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$

$d = \sqrt[3]{V} \times 1{,}132$

Applications numériques

① $V = 536\ cm^3$

$d = \sqrt[3]{536} \times 1{,}132$

$d = 8{,}1231 \times 1{,}132$

$\approx \underline{9{,}20\ cm}$

② $V = 0{,}041\ m^3$

$d = \sqrt[3]{0{,}041} \times 1{,}132$

$d = 0{,}34482 \times 1{,}132$

$\approx \underline{0{,}39\ m}$

Doc 25

INVERSES

DES NOMBRES 1 à 499

$\frac{1}{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,	0, 1	0, 500 000	0, 333 333	0, 250 000	0, 200 000	0, 166 667	0, 142 857	0, 125 000	0, 111 111
1.	100 000	090 909	083 333	076 923	071 429	066 667	062 500	058 824	055 556	052 632
2.	050 000	047 619	045 455	043 478	041 667	040 000	038 462	037 037	035 714	034 483
3.	033 333	032 258	031 250	030 303	029 412	028 571	027 778	027 027	026 316	025 641
4.	025 000	024 390	023 810	023 256	022 727	022 222	021 739	021 277	020 833	020 408
5.	020 000	019 608	019 231	018 868	018 519	018 182	017 857	017 544	017 241	016 949
6.	016 667	016 393	016 129	015 873	015 625	015 385	015 152	014 925	014 706	014 493
7.	014 286	014 085	013 889	013 699	013 514	013 333	013 158	012 987	012 821	012 658
8.	012 500	012 346	012 195	012 048	011 905	011 765	011 628	011 494	011 364	011 236
9.	011 111	010 989	010 870	010 753	010 638	010 526	010 417	010 309	010 204	010 101
10.	010 000	009 901	009 804	009 709	009 615	009 524	009 434	009 346	009 259	009 174
11.	009 091	009 009	008 929	008 850	008 772	008 696	008 621	008 547	008 475	008 403
12.	008 333	008 264	008 197	008 130	008 065	008 000	007 937	007 874	007 813	007 752
13.	007 692	007 634	007 576	007 519	007 463	007 407	007 353	007 299	007 246	007 194
14.	007 143	007 092	007 042	006 993	006 944	006 897	006 849	006 803	006 757	006 711
15.	006 667	006 623	006 579	006 536	006 494	006 452	006 410	006 369	006 329	006 289
16.	006 250	006 211	006 173	006 135	006 098	006 061	006 024	005 988	005 952	005 917
17.	005 882	005 848	005 814	005 780	005 747	005 714	005 682	005 650	005 618	005 587
18.	005 556	005 525	005 495	005 464	005 435	005 405	005 376	005 348	005 319	005 291
19.	005 263	005 236	005 208	005 181	005 155	005 128	005 102	005 076	005 051	005 025
20.	005 000	004 975	004 950	004 926	004 902	004 878	004 854	004 831	004 808	004 785
21.	004 762	004 739	004 717	004 695	004 673	004 651	004 630	004 608	004 587	004 566
22.	004 545	004 525	004 505	004 484	004 464	004 444	004 425	004 405	004 386	004 367
23.	004 348	004 329	004 310	004 292	004 274	004 255	004 237	004 219	004 202	004 184
24.	004 167	004 149	004 132	004 115	004 098	004 082	004 065	004 049	004 032	004 016
25.	004 000	003 984	003 968	003 953	003 937	003 922	003 906	003 891	003 876	003 861
26.	003 846	003 831	003 817	003 802	003 788	003 774	003 759	003 745	003 731	003 717
27.	003 704	003 690	003 676	003 663	003 650	003 636	003 623	003 610	003 597	003 584
28.	003 571	003 559	003 546	003 534	003 521	003 509	003 497	003 484	003 472	003 460
29.	003 448	003 436	003 425	003 413	003 401	003 390	003 378	003 367	003 356	003 344
30.	003 333	003 322	003 311	003 300	003 289	003 279	003 268	003 257	003 247	003 236
31.	003 226	003 215	003 205	003 195	003 185	003 175	003 165	003 155	003 145	003 135
32.	003 125	003 115	003 106	003 096	003 086	003 077	003 067	003 058	003 049	003 040
33.	003 030	003 021	003 012	003 003	002 994	002 985	002 976	002 967	002 959	002 950
34.	002 941	002 933	002 924	002 915	002 907	002 899	002 890	002 882	002 874	002 865
35.	002 857	002 849	002 841	002 833	002 825	002 817	002 809	002 801	002 793	002 786
36.	002 778	002 770	002 762	002 755	002 747	002 740	002 732	002 725	002 717	002 710
37.	002 703	002 695	002 688	002 681	002 674	002 667	002 660	002 653	002 646	002 639
38.	002 632	002 625	002 618	002 611	002 604	002 597	002 591	002 584	002 577	002 571
39.	002 564	002 558	002 551	002 545	002 538	002 532	002 525	002 519	002 513	002 506
40.	002 500	002 494	002 488	002 481	002 475	002 469	002 463	002 457	002 451	002 445
41.	002 439	002 433	002 427	002 421	002 415	002 410	002 404	002 398	002 392	002 387
42.	002 381	002 375	002 370	002 364	002 358	002 353	002 347	002 342	002 336	002 331
43.	002 326	002 320	002 315	002 309	002 304	002 299	002 294	002 288	002 283	002 278
44.	002 273	002 268	002 262	002 257	002 252	002 247	002 242	002 237	002 232	002 227
45.	002 222	002 217	002 212	002 208	002 203	002 198	002 193	002 188	002 183	002 179
46.	002 174	002 169	002 165	002 160	002 155	002 151	002 146	002 141	002 137	002 132
47.	002 128	002 123	002 119	002 114	002 110	002 105	002 101	002 096	002 092	002 088
48.	002 083	002 079	002 075	002 070	002 066	002 062	002 058	002 053	002 049	002 045
49.	002 041	002 037	002 033	002 028	002 024	002 020	002 016	002 012	002 008	002 004

UTILISATION DE LA TABLE

① Au lieu de diviser par un nombre N, on multiplie par $\frac{1}{N}$, l'inverse du nombre

$$A : N = A \times \frac{1}{N}$$

Exemple: $52 : 43 = 52 \times \frac{1}{43}$

$= 52 \times 0{,}023\,256$

$= 1{,}209\,3$

UN CAS USUEL

② Au lieu de diviser par π, on multiplie par l'inverse de π

$\pi = 3{,}141\,59\ldots$ $\quad \frac{1}{\pi} = 0{,}318\,31\ldots$

Exemple: $420 : \pi = 420 \times \frac{1}{\pi}$

$= 420 \times 0{,}318\,3$

$= 133{,}68$

$\frac{1}{N}$ INVERSES

DES NOMBRES 500 à 999

Doc 26

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
50.	002 000	001 996	001 992	001 988	001 984	001 980	001 976	001 972	001 969	001 965
51.	001 961	001 957	001 953	001 949	001 946	001 942	001 938	001 934	001 931	001 927
52.	001 923	001 919	001 916	001 912	001 908	001 905	001 901	001 898	001 894	001 890
53.	001 887	001 883	001 880	001 876	001 873	001 869	001 866	001 862	001 859	001 855
54.	001 852	001 848	001 845	001 842	001 838	001 835	001 832	001 828	001 825	001 821
55.	001 818	001 815	001 812	001 808	001 805	001 802	001 799	001 795	001 792	001 789
56.	001 786	001 783	001 779	001 776	001 773	001 770	001 767	001 764	001 761	001 757
57.	001 754	001 751	001 748	001 745	001 742	001 739	001 736	001 733	001 730	001 727
58.	001 724	001 721	001 718	001 715	001 712	001 709	001 706	001 704	001 701	001 698
59.	001 695	001 692	001 689	001 686	001 684	001 681	001 678	001 675	001 672	001 669
60.	001 667	001 664	001 661	001 658	001 656	001 653	001 650	001 647	001 645	001 642
61.	001 639	001 637	001 634	001 631	001 629	001 626	001 623	001 621	001 618	001 616
62.	001 613	001 610	001 608	001 605	001 603	001 600	001 597	001 595	001 592	001 590
63.	001 587	001 585	001 582	001 580	001 577	001 575	001 572	001 570	001 567	001 565
64.	001 563	001 560	001 558	001 555	001 553	001 550	001 548	001 546	001 543	001 541
65.	001 538	001 536	001 534	001 531	001 529	001 527	001 524	001 522	001 520	001 517
66.	001 515	001 513	001 511	001 508	001 506	001 504	001 502	001 499	001 497	001 495
67.	001 493	001 490	001 488	001 486	001 484	001 481	001 479	001 477	001 475	001 473
68.	001 471	001 468	001 466	001 464	001 462	001 460	001 458	001 456	001 453	001 451
69.	001 449	001 447	001 445	001 443	001 441	001 439	001 437	001 435	001 433	001 431
70.	001 429	001 427	001 425	001 422	001 420	001 418	001 416	001 414	001 412	001 410
71.	001 408	001 406	001 404	001 403	001 401	001 399	001 397	001 395	001 393	001 391
72.	001 389	001 387	001 385	001 383	001 381	001 379	001 377	001 376	001 374	001 372
73.	001 370	001 368	001 366	001 364	001 362	001 361	001 359	001 357	001 355	001 353
74.	001 351	001 350	001 348	001 346	001 344	001 342	001 340	001 339	001 337	001 335
75.	001 333	001 332	001 330	001 328	001 326	001 325	001 323	001 321	001 319	001 318
76.	001 316	001 314	001 312	001 311	001 309	001 307	001 305	001 304	001 302	001 300
77.	001 299	001 297	001 295	001 294	001 292	001 290	001 289	001 287	001 285	001 284
78.	001 282	001 280	001 279	001 277	001 276	001 274	001 272	001 271	001 269	001 267
79.	001 266	001 264	001 263	001 261	001 259	001 258	001 256	001 255	001 253	001 252
80.	001 250	001 248	001 247	001 245	001 244	001 242	001 241	001 239	001 238	001 236
81.	001 235	001 233	001 232	001 230	001 229	001 227	001 225	001 224	001 222	001 221
82.	001 220	001 218	001 217	001 215	001 214	001 212	001 211	001 209	001 208	001 206
83.	001 205	001 203	001 202	001 200	001 199	001 198	001 196	001 195	001 193	001 192
84.	001 190	001 189	001 188	001 186	001 185	001 183	001 182	001 181	001 179	001 178
85.	001 176	001 175	001 174	001 172	001 171	001 170	001 168	001 167	001 166	001 164
86.	001 163	001 161	001 160	001 159	001 157	001 156	001 155	001 153	001 152	001 151
87.	001 149	001 148	001 147	001 145	001 144	001 143	001 142	001 140	001 139	001 138
88.	001 136	001 135	001 134	001 133	001 131	001 130	001 129	001 127	001 126	001 125
89.	001 124	001 122	001 121	001 120	001 119	001 117	001 116	001 115	001 114	001 112
90.	001 111	001 110	001 109	001 107	001 106	001 105	001 104	001 103	001 101	001 100
91.	001 099	001 098	001 096	001 095	001 094	001 093	001 092	001 091	001 089	001 088
92.	001 087	001 086	001 085	001 083	001 082	001 081	001 080	001 079	001 078	001 076
93.	001 075	001 074	001 073	001 072	001 071	001 070	001 068	001 067	001 066	001 065
94.	001 064	001 063	001 062	001 060	001 059	001 058	001 057	001 056	001 055	001 054
95.	001 053	001 052	001 050	001 049	001 048	001 047	001 046	001 045	001 044	001 043
96.	001 042	001 041	001 040	001 038	001 037	001 036	001 035	001 034	001 033	001 032
97.	001 031	001 030	001 029	001 028	001 027	001 026	001 025	001 024	001 022	001 021
98.	001 020	001 019	001 018	001 017	001 016	001 015	001 014	001 013	001 012	001 011
99.	001 010	001 009	001 008	001 007	001 006	001 005	001 004	001 003	001 002	001 001

CALCULS TRIGONOMÉTRIQUES

① *Exemple:* Au lieu de diviser par $\sin x$, on multiplie par $\frac{1}{\sin x}$

$35 : \sin 40° ?$

$= 35 : 0{,}6428 \approx 35 : 0{,}643$

$= 35 \times 1{,}555 = \underline{54{,}4}$

② *Exemple:* Au lieu de diviser par $\cos x$, on multiplie par $\frac{1}{\cos x}$

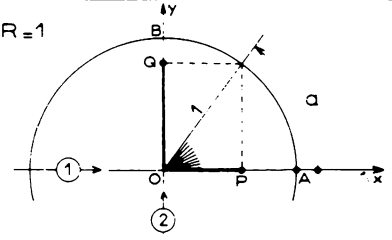
$490 : \cos 81° ?$

$= 490 : 0{,}990$

$= 490 \times 1{,}01 = \underline{494{,}9}$

Doc 27 — FONCTIONS CIRCULAIRES

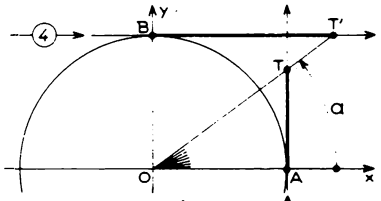
DÉFINITIONS



$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

① Axe des cosinus $\cos a = \overline{OP}$

② Axe des sinus $\sin a = \overline{OQ}$



R = 1 $\quad \operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\operatorname{tg} a \times \operatorname{cotg} a = 1$$

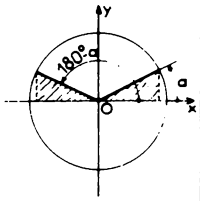
③ Axe des tangentes $\operatorname{tg} a = \overline{AT}$

④ Axe des cotangentes $\operatorname{cotg} a = \overline{BT'}$

VALEURS USUELLES

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$ = 0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	$\frac{1}{2}$ = 0,5	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,577	1	$\sqrt{3}$ = 1,732	∞
cotg	∞	$\sqrt{3}$ = 1,732	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,577	0

ANGLES ASSOCIÉS



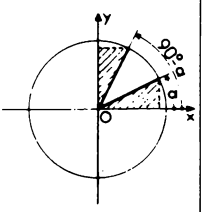
SOMME = 180° (supplémentaires)

$\sin(180° - a) = \sin a$

$\cos(180° - a) = -\cos a$

$\operatorname{tg}(180° - a) = -\operatorname{tg} a$

$\operatorname{cotg}(180° - a) = -\operatorname{cotg} a$



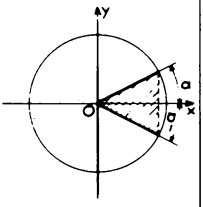
SOMME = 90° (complémentaires)

$\sin(90° - a) = \cos a$

$\cos(90° - a) = \sin a$

$\operatorname{tg}(90° - a) = \operatorname{cotg} a$

$\operatorname{cotg}(90° - a) = \operatorname{tg} a$



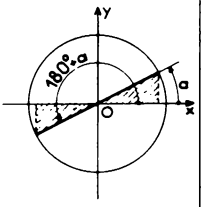
SOMME = 0° (opposés)

$\sin(-a) = -\sin a$

$\cos(-a) = \cos a$

$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$

$\operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a$



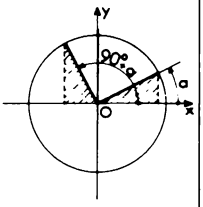
DIFFÉRENCE = 180°

$\sin(180° + a) = -\sin a$

$\cos(180° + a) = -\cos a$

$\operatorname{tg}(180° + a) = \operatorname{tg} a$

$\operatorname{cotg}(180° + a) = \operatorname{cotg} a$



DIFFÉRENCE = 90°

$\sin(90° + a) = \cos a$

$\cos(90° + a) = -\sin a$

$\operatorname{tg}(90° + a) = -\operatorname{cotg} a$

$\operatorname{cotg}(90° + a) = -\operatorname{tg} a$

TRANSFORMATIONS TRIGO.

Doc 28

① ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

a et x en degrés, k: nombre algébrique entier.

$$\sin x = \sin a \begin{cases} x = a + 180° \times 2k \\ \text{ou} \\ x = (180° - a) + 180° \times 2k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos a \begin{cases} x = \pm a + 180° \times 2k \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad \{x = a + 180° \times k$$

Expression de cos a et sin a :

$$\cos a = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \qquad \cos a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \qquad \sin a = \frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$(\varepsilon = +1 \text{ ou } \varepsilon = -1)$ $\qquad \operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

② FORMULES D'ADDITION

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

③ SOMMES EN PRODUITS

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p \pm q}{\cos p \cos q}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

④ FORMULES DE MULTIPLICATION

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

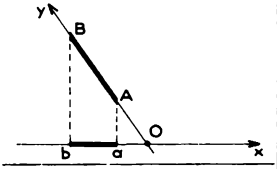
$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

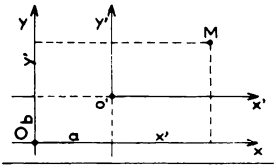
⑤ APPLICATIONS

Projection d'un vecteur



$$\overline{ab} = \overline{A.B}\cos(\vec{ox}, \vec{oy})$$

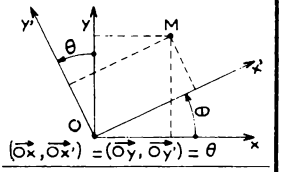
Translation des axes



$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

Rotation des axes



$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

Doc 29

SINUS 0° à 45°

S

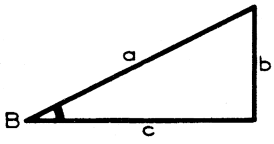
Degrés	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
	Minutes							
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0611	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0930	0,0959	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1651	0,1679	0,1708	0,1737	80
10	0,1737	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2335	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3063	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3366	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3988	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4618	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6495	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6968	0,6988	0,7009	0,7030	0,7051	0,7071	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
	Minutes							

COSINUS 45° à 90°

$\sin\widehat{B} = \frac{b}{a}$

$b = a \sin\widehat{B}$

$a = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$



$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}$

$c = a \cos\widehat{B}$

$a = \frac{c}{\cos\widehat{B}}$

S — SINUS 45° à 90°

Doc 30

Degrés	Minutes 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7132	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7313	43
47	0,7313	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7933	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8191	35
55	0,8191	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8481	32
58	0,8481	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8602	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8830	28
62	0,8830	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9136	24
66	0,9136	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9357	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9501	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9629	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9682	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9782	12
78	0,9782	0,9788	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9832	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés

Minutes

COSINUS 0° à 45°

LECTURE DIRECTE	CALCUL UTILISANT LA DIFFERENCE TABULAIRE	LECTURE DIRECTE
Exemple: sin 20°10'=0,3448	sin 20°16'	Exemple: cos 25°40'=0,9013
A retenir sin 30°=0,5 sin 45°=0,707 sin 60°=0,866	sin 20°20'= 0,3475 sin 20°10'= 0,3448 différence 10' Δ = 27 pour 6 = 27×6/10 = 16 différence Δ'= 0,0016 sin 20°10' = 0,3448 sin 20°16' = 0,3464	A retenir cos 30°=0,866 cos 45°=0,707 cos 60°=0,5

Doc 31

TANGENTE 0° à 45°

T

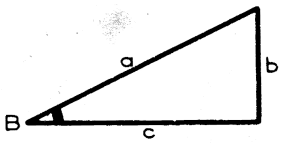
Degrés	Minutes 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1081	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1884	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2248	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2680	75
15	0,2680	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2868	74
16	0,2868	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3027	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4007	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4211	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4418	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5355	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5891	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6788	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
				Minutes				

COTANGENTE 45° à 90°

$tg\widehat{B} = \frac{b}{c}$

$b = c\ tg\widehat{B}$

$c = \frac{b}{tg\widehat{B}}$



$cotg\widehat{B} = \frac{c}{b}$

$b = \frac{c}{cotg\widehat{B}}$

$c = b\ cotg\widehat{B}$

T — TANGENTE 45° à 90°

Doc 32

Degrés	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	Degrés
	Minutes							
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0236	1,0295	1,0355	44
46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661	1,0724	43
47	1,0724	1,0786	1,0850	1,0913	1,0977	1,1041	1,1106	42
48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1369	1,1436	1,1504	41
49	1,1504	1,1572	1,1640	1,1709	1,1778	1,1847	1,1918	40
50	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276	1,2349	39
51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723	1,2799	38
52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190	1,3270	37
53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680	1,3764	36
54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4020	1,4106	1,4193	1,4281	35
55	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733	1,4826	34
56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301	1,5399	33
57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900	1,6003	32
58	1,6003	1,6107	1,6213	1,6319	1,6426	1,6534	1,6643	31
59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205	1,7321	30
60	1,7321	1,7438	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917	1,8041	29
61	1,8041	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676	1,8807	28
62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486	1,9626	27
63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353	2,0503	26
64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283	2,1445	25
65	2,1445	2,1609	2,1775	2,1943	2,2113	2,2286	2,2460	24
66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369	2,3559	23
67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545	2,4751	22
68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5387	2,5605	2,5826	2,6051	21
69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	2,6985	2,7228	2,7475	20
70	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770	2,9042	19
71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	3,0178	3,0475	3,0777	18
72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371	3,2709	17
73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495	3,4874	16
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6471	3,6891	3,7321	15
75	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14
76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13
77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6383	4,7046	12
78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658	5,1446	11
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764	5,6713	10
80	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970	6,3138	9
81	6,3138	6,4348	6,5606	6,6912	6,8269	6,9682	7,1154	8
82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530	8,1444	7
83	8,1444	8,3450	8,5556	8,7769	9,0098	9,2553	9,5144	6
84	9,5144	9,7882	10,0780	10,3854	10,7119	11,0594	11,4301	5
85	11,4301	11,8262	12,2505	12,7062	13,1969	13,7267	14,3007	4
86	14,3007	14,9244	15,6048	16,3499	17,1693	18,0750	19,0811	3
87	19,0811	20,2056	21,4704	22,9038	24,5418	26,4316	28,6363	2
88	28,6363	31,2416	34,3678	38,1885	42,9641	49,1039	57,2900	1
89	57,2900	68,7501	85,9398	114,5887	171,8854	343,7737		0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Degrés
	Minutes							

COTANGENTE 0° à 45°

LECTURE DIRECTE	CONVERSION	LECTURE DIRECTE
tg 23°40' = 0,4383	Pente en % ⟷ Angle en degrés	cotg 39°10' = 1,2276
A retenir	Pente = tg α × 100	A retenir
tg 30° = 0,5773		cotg 30° = 1,7320
tg 45° = 1,0000	Exemple :	cotg 45° = 1,0000
tg 60° = 1,7320	α = 6° Pente = tg 6° × 100 = 10,51 %	cotg 60° = 0,5773

Doc 33 — DEGRÉS, GRADES, RADIANS (°) (gr) (rd)

gr—rd

① DEGRÉS EN RADIANS

°	rd
1	0,017 45
2	0,034 91
3	0,052 36
4	0,069 81
5	0,087 27
6	0,104 72
7	0,122 17
8	0,139 63
9	0,157 08

1′ = 0,000 29 rd
1″ = 0,000 005 rd

Exemple: 62°32′

60°	1,047 2
2°	0,034 91
30′	0,008 7
2′	0,000 58
	1,091 39

62°32′ = 1,0914 rd

② GRADES EN RADIANS

gr	rd
1	0,015 71
2	0,031 42
3	0,047 12
4	0,062 83
5	0,078 54
6	0,094 25
7	0,109 96
8	0,125 66
9	0,141 37

1 dgr = 0,001 57 rd
1 cgr = 0,000 16 rd

Exemple: 29,43 gr

20 gr	0,314 2
9 gr	0,141 37
4 dgr	0,006 28
3 cgr	0,000 48
	0,462 33

29,43 gr = 0,4623 rd

③ RADIANS EN DEGRÉS

0,1 rd	°	0,01 rd	°	0,001 rd	°
1	5°43′46″	1	34′23″	1	3′26″
2	11°27′33″	2	1°08′45″	2	6′53″
3	17°11′19″	3	1°43′08″	3	10′19″
4	22°55′06″	4	2°17′31″	4	13′45″
5	28°38′52″	5	2°51′53″	5	17′11″
6	34°22′39″	6	3°26′16″	6	20′37″
7	40°06′25″	7	4°00′39″	7	24′04″
8	45°50′12″	8	4°35′01″	8	27′30″
9	51°33′58″	9	5°09′24″	9	30′56″
10	57°17′45″	10	5°43′46″	10	34′23″

Exemple: 0,25 rd

0,2 rd	11°27′33″
0,05 rd	2°51′53″
	14°19′26″

0,25 rd = 14°19′26″

④ RADIANS EN GRADES

0,1 rd	gr	0,01 rd	gr	0,001 rd	gr
1	6,366	1	0,637	1	0,064
2	12,732	2	1,273	2	0,127
3	19,099	3	1,910	3	0,191
4	25,465	4	2,547	4	0,255
5	31,831	5	3,183	5	0,318
6	38,197	6	3,820	6	0,382
7	44,563	7	4,456	7	0,446
8	50,930	8	5,093	8	0,509
9	57,296	9	5,730	9	0,573
10	63,662	10	6,366	10	0,637

Exemple: 1,467 rd

1 rd	63,66
0,4 rd	25,465
0,06 rd	3,820
0,007 rd	0,446
	93,391

1,467 rd ≈ 93,39 gr

⑤ PETITS ANGLES (≤ 0,1 rd ou 5°40′)

L'angle x est exprimé en rd

Résultats avec 4 ou même 5 chiffres exacts

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$

$x \approx \sin x + \frac{\sin^3 x}{6}$

$x \approx \sqrt{2 - 2\cos x}$

$x \approx \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3}$

Utiliser :

- *les tables de conversion*
- *les tables des carrés et des cubes*

gr — GRADES — Doc 34

⇩	SINUS	COSINUS	TANGENTE	COTANGENTE	⇧
1	0,0157	0,9999	0,0157	63,657	99
2	0,0314	0,9995	0,0314	31,821	98
3	0,0471	0,9989	0,0472	21,205	97
4	0,0628	0,9981	0,0629	15,895	96
5	0,0785	0,9969	0,0787	12,706	95
6	0,0941	0,9956	0,0945	10,579	94
7	0,1097	0,9940	0,1104	9,0579	93
8	0,1253	0,9921	0,1263	7,9158	92
9	0,1409	0,9900	0,1423	7,0264	91
10	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	90
11	0,1719	0,9851	0,1745	5,7297	89
12	0,1874	0,9823	0,1908	5,2422	88
13	0,2028	0,9792	0,2071	4,8288	87
14	0,2181	0,9759	0,2235	4,4737	86
15	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	85
16	0,2487	0,9686	0,2568	3,8947	84
17	0,2639	0,9646	0,2736	3,6554	83
18	0,2790	0,9603	0,2905	3,4420	82
19	0,2940	0,9558	0,3076	3,2506	81
20	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	80
21	0,3239	0,9461	0,3424	2,9208	79
22	0,3387	0,9409	0,3600	2,7776	78
23	0,3535	0,9354	0,3779	2,6464	77
24	0,3681	0,9298	0,3959	2,5257	76
25	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	75
26	0,3971	0,9178	0,4327	2,3109	74
27	0,4115	0,9114	0,4515	2,2148	73
28	0,4258	0,9048	0,4706	2,1251	72
29	0,4399	0,8980	0,4899	2,0413	71
30	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	70
31	0,4679	0,8838	0,5295	1,8887	69
32	0,4818	0,8763	0,5498	1,8190	68
33	0,4955	0,8686	0,5704	1,7532	67
34	0,5090	0,8607	0,5914	1,6909	66
35	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	65
36	0,5358	0,8443	0,6346	1,5757	64
37	0,5490	0,8358	0,6569	1,5224	63
38	0,5621	0,8271	0,6796	1,4715	62
39	0,5750	0,8181	0,7028	1,4229	61
40	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	60
41	0,6004	0,7997	0,7508	1,3319	59
42	0,6129	0,7902	0,7757	1,2892	58
43	0,6252	0,7804	0,8012	1,2482	57
44	0,6374	0,7705	0,8273	1,2088	56
45	0,6494	0,7604	0,8541	1,1709	55
46	0,6613	0,7501	0,8816	1,1343	54
47	0,6730	0,7396	0,9099	1,0990	53
48	0,6845	0,7290	0,9391	1,0649	52
49	0,6959	0,7181	0,9619	1,0319	51
50	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	50
⇩	COSINUS	SINUS	COTANGENTE	TANGENTE	⇧

Exemple : sin 25,37 gr ?

sin 25 gr = 0,3827
sin 26 gr = 0,3971
Δ = 144
pour 0,37 gr :
Δ' = 144 x 0,37 = 53

sin 25,37 gr = 0,3880

Exemple : cotg 41,72 gr ?

cotg 41 gr = 1,3319
cotg 42 gr = 1,2892
Δ = −427
pour 0,72 gr :
Δ' = (−427) x 0,72 = −307

cotg 41,72 gr = 1,3012

Doc 35

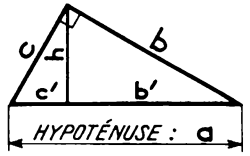
TRIANGLE RECTANGLE

RELATIONS MÉTRIQUES

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

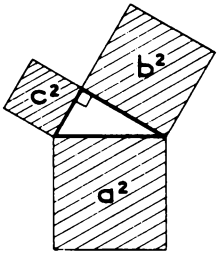
$c^2 = a^2 - b^2$



$b^2 = a\,b'$

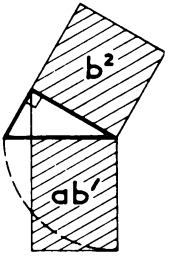
$c^2 = a\,c'$

$h = \dfrac{b\,c}{a}$

① 

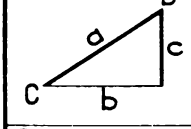
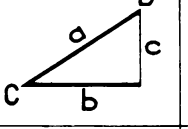
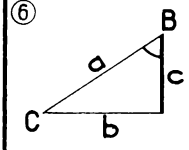
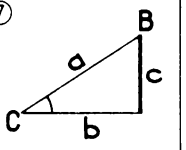
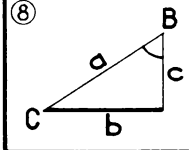
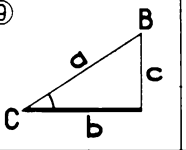
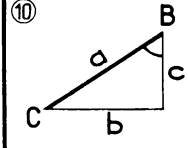
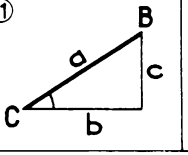
②

$h^2 = b'c'$

③ 

Exemple : $b = 12$, $c = 15$	*Exemple :* $b' = 14$, $c' = 5$	*Exemple :* $b' = 6$, $c' = 10$
$a^2 = 12^2 + 15^2 = 369$	$h^2 = 14 \times 5 = 70$	$b^2 = 16 \times 6 = 96$; $b = \sqrt{96}$
$a = \sqrt{369} = 19{,}21$	$h = \sqrt{70} = 8{,}37$	$c^2 = 16 \times 10 = 160$; $c = \sqrt{160}$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

④ 	*On connait* a *et* c $\sin \hat{C} = c : a$ $\cos \hat{B} = c : a$ $b = c \operatorname{tg} \hat{B}$	⑤ 	*On connait* a *et* b $\sin \hat{B} = b : a$ $\cos \hat{C} = b : a$ $c = b \operatorname{tg} \hat{C}$
⑥ 	*On connait* c *et* $\hat{B}$ $\hat{C} = 90° - \hat{B}$ $a = c : \cos \hat{B}$ $b = c \operatorname{tg} \hat{B}$	⑦ 	*On connait* c *et* $\hat{C}$ $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ $a = c : \sin \hat{C}$ $b = c \operatorname{cotg} \hat{C}$
⑧ 	*On connait* b *et* $\hat{B}$ $\hat{C} = 90° - \hat{B}$ $a = b : \sin \hat{B}$ $c = b \operatorname{cotg} \hat{B}$	⑨ 	*On connait* b *et* $\hat{C}$ $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ $a = b : \cos \hat{C}$ $c = b \operatorname{tg} \hat{C}$
⑩ 	*On connait* a *et* $\hat{B}$ $\hat{C} = 90° - \hat{B}$ $b = a \sin \hat{B}$ $c = a \cos \hat{B}$	⑪ 	*On connait* a *et* $\hat{C}$ $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ $b = a \cos \hat{C}$ $c = a \sin \hat{C}$

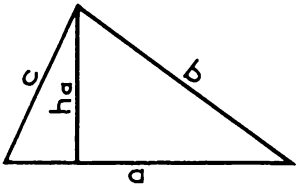
Les valeurs de SIN, COS, TG, COTG sont lues dans les tables (Doc 29, 30, 31, 32)

TRIANGLE QUELCONQUE

Doc 36

RELATIONS MÉTRIQUES

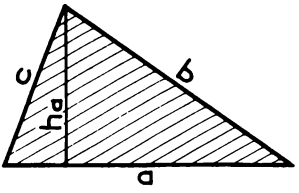
① HAUTEUR (h)



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

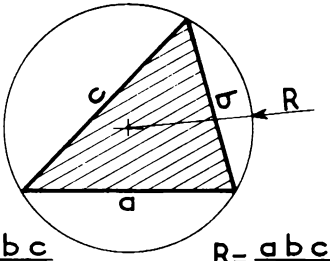
p *ou* $\frac{1}{2}$ *périmètre* $= (a+b+c) : 2$

② SURFACE (S)



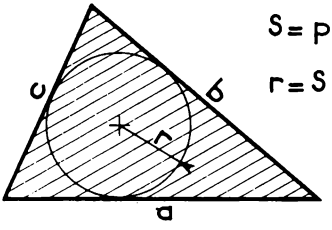
$$S = \frac{a\, h_a}{2}$$

③ CERCLE CIRCONSCRIT



$$S = \frac{a\,b\,c}{4R} \qquad R = \frac{a\,b\,c}{4S}$$

④ CERCLE INSCRIT



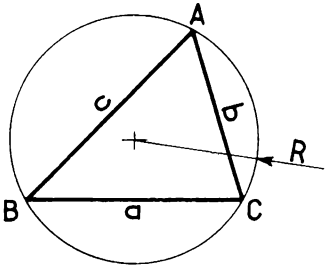
$S = p\,r$

$r = S : p$

p *ou* $\frac{1}{2}$ *périmètre* $= (a+b+c) : 2$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

⑤



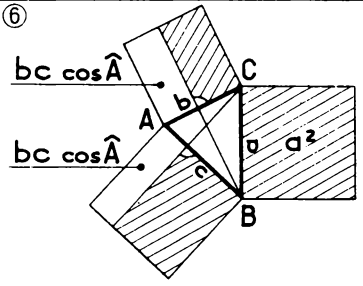
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

$$a = 2R \sin\hat{A} \qquad \sin\hat{A} = a : 2R$$

$$b = 2R \sin\hat{B} \qquad \sin\hat{B} = b : 2R$$

$$c = 2R \sin\hat{C} \qquad \sin\hat{C} = c : 2R$$

⑥



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\hat{A}$$

Si $\hat{A} > 90^\circ$

son supplément $\alpha = 180^\circ - \hat{A}$;

donc $\alpha < 90^\circ$ *et* $\cos\hat{A} = -\cos\alpha$

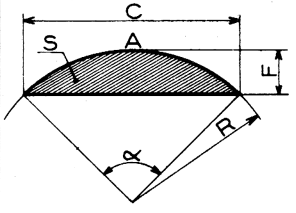
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \cos\alpha$$

Les valeurs de SIN , COS , TG , COTG sont lues dans les tables (Doc 29, 30, 31, 32)

Doc 37 — ARC, CORDE, FLÈCHE, SEGMENT

RAYON = 1 — α = 1° à 90°

α	N	A	C	F	S	α	N	A	C	F	S
1	360	0,017 5	0,017 5	0,000 04	0,000 00	46		0,802 9	0,781 5	0,079 50	0,041 76
2	180	0,034 9	0,034 9	0,000 15	0,000 00	47		0,820 3	0,797 5	0,082 94	0,044 48
3	120	0,052 4	0,052 4	0,000 34	0,000 01	48		0,837 8	0,813 5	0,086 45	0,047 31
4	90	0,069 8	0,069 8	0,000 61	0,000 03	49		0,855 2	0,829 4	0,090 04	0,050 25
5	72	0,087 3	0,087 2	0,000 95	0,000 06	50		0,872 7	0,845 2	0,093 69	0,053 31
6	60	0,104 7	0,104 7	0,001 37	0,000 10	51		0,890 1	0,861 0	0,097 41	0,056 49
7		0,122 2	0,122 1	0,001 87	0,000 15	52		0,907 6	0,876 7	0,101 21	0,059 78
8	45	0,139 6	0,139 5	0,002 44	0,000 23	53		0,925 0	0,892 4	0,105 07	0,063 19
9	40	0,157 1	0,156 9	0,003 08	0,000 32	54		0,942 5	0,908 0	0,108 99	0,066 73
10	36	0,174 5	0,174 3	0,003 81	0,000 44	55		0,959 9	0,923 5	0,112 99	0,070 39
11		0,192 0	0,191 7	0,004 60	0,000 59	56		0,977 4	0,938 9	0,117 05	0,074 17
12	30	0,209 4	0,209 1	0,005 48	0,000 76	57		0,994 8	0,954 3	0,121 18	0,078 08
13		0,226 9	0,226 4	0,006 43	0,000 97	58		1,012 3	0,969 6	0,125 38	0,082 12
14		0,244 3	0,243 7	0,007 45	0,001 21	59		1,029 7	0,984 8	0,129 64	0,086 29
15	24	0,261 8	0,261 1	0,008 56	0,001 49	60	6	1,047 2	1,000 0	0,133 97	0,090 59
16		0,279 3	0,278 3	0,009 73	0,001 81	61		1,064 7	1,015 1	0,138 37	0,095 02
17		0,296 7	0,295 6	0,010 98	0,002 17	62		1,082 1	1,030 1	0,142 83	0,099 58
18	20	0,314 2	0,312 9	0,012 31	0,002 57	63		1,099 6	1,045 0	0,147 36	0,104 28
19		0,331 6	0,330 1	0,013 71	0,003 02	64		1,117 0	1,059 8	0,151 95	0,109 11
20	18	0,349 1	0,347 3	0,015 19	0,003 52	65		1,134 5	1,074 6	0,156 61	0,114 08
21		0,366 5	0,364 5	0,016 75	0,004 08	66		1,151 9	1,089 3	0,161 33	0,119 19
22		0,384 0	0,381 6	0,018 37	0,004 68	67		1,169 4	1,103 9	0,166 11	0,124 43
23		0,401 4	0,398 7	0,020 08	0,005 35	68		1,186 8	1,118 4	0,170 96	0,129 82
24	15	0,418 9	0,415 8	0,021 85	0,006 07	69		1,204 3	1,132 8	0,175 87	0,135 35
25		0,436 3	0,432 9	0,023 70	0,006 86	70		1,221 7	1,147 2	0,180 85	0,141 02
26		0,453 8	0,449 9	0,025 63	0,007 71	71		1,239 2	1,161 4	0,185 88	0,146 83
27		0,471 2	0,466 9	0,027 63	0,008 62	72	5	1,256 6	1,175 6	0,190 98	0,152 79
28		0,488 7	0,483 8	0,029 69	0,009 61	73		1,274 1	1,189 6	0,196 14	0,158 89
29		0,506 1	0,500 8	0,031 85	0,010 67	74		1,291 5	1,203 6	0,201 36	0,165 14
30	12	0,523 6	0,517 6	0,034 07	0,011 80	75		1,309 0	1,217 5	0,206 65	0,171 54
31		0,541 1	0,534 5	0,036 37	0,013 01	76		1,326 5	1,231 3	0,211 99	0,178 08
32		0,558 5	0,551 2	0,038 74	0,014 29	77		1,343 9	1,245 0	0,217 39	0,184 77
33		0,576 0	0,568 0	0,041 18	0,015 66	78		1,361 4	1,258 6	0,222 85	0,191 60
34		0,593 4	0,584 7	0,043 70	0,017 11	79		1,378 8	1,272 2	0,228 38	0,198 59
35		0,610 9	0,601 4	0,046 28	0,018 64	80		1,396 3	1,285 6	0,233 96	0,205 73
36	10	0,628 3	0,618 0	0,048 94	0,020 27	81		1,413 7	1,298 9	0,239 59	0,213 01
37		0,645 8	0,634 6	0,051 68	0,021 98	82		1,431 2	1,312 1	0,245 29	0,220 45
38		0,663 2	0,651 1	0,054 48	0,023 78	83		1,448 6	1,325 2	0,251 04	0,228 04
39		0,680 7	0,667 6	0,057 36	0,025 68	84		1,466 1	1,338 3	0,256 86	0,235 78
40	9	0,698 1	0,684 0	0,060 31	0,027 67	85		1,483 5	1,351 2	0,262 72	0,243 67
41		0,715 6	0,700 4	0,063 33	0,029 76	86		1,501 0	1,364 0	0,268 65	0,251 71
42		0,733 0	0,716 7	0,066 42	0,031 95	87		1,518 4	1,376 7	0,274 63	0,259 90
43		0,750 5	0,733 0	0,069 58	0,034 25	88		1,535 9	1,389 3	0,280 66	0,268 25
44		0,767 9	0,749 2	0,072 81	0,036 64	89		1,553 3	1,401 8	0,286 75	0,276 75
45	8	0,785 4	0,765 4	0,076 12	0,039 15	90	4	1,570 8	1,414 2	0,292 89	0,285 40



α = Angle

R = Rayon

A = Arc

C = Corde

F = Flèche

S = Segment

RELATIONS

Corde $C = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$

ou $C = 2\sqrt{2RF - F^2}$

Flèche $F = R\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$

ou $F = R - \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}}$

Arc A

$A = \frac{\pi R \alpha}{180}$

Rayon R

$R = \frac{C^2}{8F} + \frac{F}{2}$

ARC, CORDE, FLÈCHE, SEGMENT

RAYON = 1 — $\alpha = 91°$ à $180°$

Doc 38

α	N	A	C	F	S	α	N	A	C	F	S
91		1,588 2	1,426 5	0,299 09	0,294 20	136		2,373 6	1,854 4	0,625 39	0,839 49
92		1,605 7	1,438 7	0,305 34	0,303 16	137		2,391 1	1,860 8	0,633 50	0,854 55
93		1,623 2	1,450 7	0,311 65	0,312 26	138		2,408 6	1,867 2	0,641 63	0,869 71
94		1,640 6	1,462 7	0,318 00	0,321 52	139		2,426·0	1,873 3	0,649 79	0,884 97
95		1,658 0	1,474 6	0,324 41	0,330 93	140		2,443 5	1,879 4	0,657 98	0,900 34
96		1,675 5	1,486 3	0,330 87	0,340 50	141		2,460 9	1,885 3	0,666 19	0,915 80
97		1,693 0	1,497 9	0,337 38	0,350 21	142		2,478 4	1,891 0	0,674 43	0,931 35
98		1,710 4	1,509 4	0,343 94	0,360 08	143		2,495 8	1,896 6	0,682 70	0,947 00
99		1,727 9	1,520 8	0,350 55	0,370 09	144		2,513 3	1,902 1	0,690 98	0,962 74
100		1,745 3	1,532 1	0,357 21	0,380 26	145		2,530 7	1,907 4	0,699 29	0,978 58
101		1,762 8	1,543 2	0,363 92	0,390 58	146		2,548 2	1,912 6	0,707 63	0,994 49
102		1,780 2	1,554 3	0,370 68	0,401 04	147		2,565 6	1,917 6	0,715 98	1,010 50
103		1,797 7	1,565 2	0,377 49	0,411 66	148		2,583 1	1,922 5	0,724 36	1,026 58
104		1,815 1	1,576 0	0,384 34	0,422 42	149		2,600 5	1,927 3	0,732 76	1,042 75
105		1,832 6	1,586 7	0,391 24	0,433 34	150		2,618 0	1,931 9	0,741 18	1,059 00
106		1,850 0	1,597 3	0,398 18	0,444 39	151		2,635 4	1,936 3	0,749 62	1,075 32
107		1,867 5	1,607 7	0,405 18	0,455 60	152		2,652 9	1,940 6	0,758 08	1,091 71
108		1,885 0	1,618 0	0,412 21	0,466 95	153		2,670 4	1,944 7	0,766 55	1,108 18
109		1,902 4	1,628 2	0,419 30	0,478 44	154		2,687 8	1,948 7	0,775 05	1,124 72
110		1,919 9	1,638 3	0,426 42	0,490 08	155		2,705 3	1,952 6	0,783 56	1,141 32
111		1,937 3	1,648 3	0,433 59	0,501 87	156		2,722 7	1,956 3	0,792 09	1,157 99
112		1,954 8	1,658 1	0,440 81	0,513 79	157		2,740 2	1,959 8	0,800 63	1,174 72
113		1,972 2	1,667 8	0,448 06	0,525 86	158		2,757 6	1,963 2	0,809 19	1,191 51
114		1,989 7	1,677 3	0,455 36	0,538 07	159		2,775 1	1,966 5	0,817 76	1,208 35
115		2,007 1	1,686 8	0,462 70	0,550 41	160		2,792 5	1,969 6	0,826 35	1,225 25
116		2,024 6	1,696 1	0,470 08	0,562 89	161		2,810 0	1,972 6	0,834 95	1,242 21
117		2,042 0	1,705 3	0,477 50	0,575 51	162		2,827 4	1,975 4	0,843 57	1,259 21
118		2,059 5	1,714 3	0,484 96	0,588 27	163		2,844 9	1,978 0	0,852 19	1,276 26
119		2,076 9	1,723 3	0,492 46	0,601 16	164		2,862 3	1,980 5	0,860 83	1,293 35
120	3	2,094 4	1,732 1	0,500 00	0,614 18	165		2,879 8	1,982 9	0,869 47	1,310 49
121		2,111 8	1,740 7	0,507 58	0,627 34	166		2,897 2	1,985 1	0,878 13	1,327 66
122		2,129 3	1,749 2	0,515 19	0,640 63	167		2,914 7	1,987 1	0,886 80	1,344 87
123		2,146 8	1,757 6	0,522 84	0,654 04	168		2,932 2	1,989 0	0,895 47	1,362 12
124		2,164 2	1,765 9	0,530 53	0,667 59	169		2,949 6	1,990 8	0,904 15	1,379 40
125		2,181 7	1,774 0	0,538 25	0,681 25	170		2,967 1	1,992 4	0,912 84	1,396 71
126		2,199 1	1,782 0	0,546 01	0,695 05	171		2,984 5	1,993 8	0,921 54	1,414 04
127		2,216 6	1,789 9	0,553 80	0,708 97	172		3,002 0	1,995 1	0,930 24	1,431 40
128		2,234 0	1,797 6	0,561 63	0,723 01	173		3,019 4	1,996 3	0,938 95	1,448 78
129		2,251 5	1,805 2	0,569 49	0,737 16	174		3,036 9	1,997 3	0,947 66	1,466 17
130		2,268 9	1,812 6	0,577 38	0,751 44	175		3,054 3	1,998 1	0,956 38	1,483 59
131		2,286 4	1,819 9	0,585 31	0,765 84	176		3,071 8	1,998 8	0,965 10	1,501 01
132		2,303 8	1,827 1	0,593 26	0,780 34	177		3,089 2	1,999 3	0,973 82	1,518 45
133		2,321 3	1,834 1	0,601 25	0,794 97	178		3,106 7	1,999 7	0,982 55	1,535 89
134		2,338 7	1,841 0	0,609 27	0,809 70	179		3,124 1	1,999 9	0,991 27	1,553 34
135		2,356 2	1,847 8	0,617 32	0,824 54	180		3,141 6	2,000 0	1,000 00	1,570 80

NOMBRE DE CÔTÉS (N) DU POLYGONE RÉGULIER

UTILISATION DE LA TABLE : Exemple $\alpha = 45°$

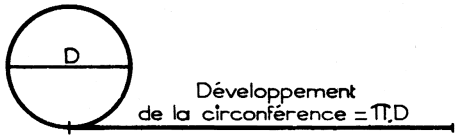
Lecture sur table	En fonction de R	Application : R = 20 mm
A = 0,785 4	Arc = A . R	Arc = 0,785 4 x 20 = 15,708 mm
C = 0,765 4	Corde = C . R	Corde = 0,765 4 x 20 = 15,308 mm
F = 0,076 12	Flèche = F . R	Flèche = 0,076 12 x 20 = 1,522 mm
S = 0,039 15	Segment = S . R^2	Segment = 0,039 15 x 20^2 = 15,66 mm^2

Doc 39 — CIRCONFÉRENCE

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708	18,850	21,991	25,133	28,274
1.	31,416	34,558	37,699	40,841	43,982	47,124	50,265	53,407	56,549	59,690
2.	62,832	65,973	69,115	72,257	75,398	78,540	81,681	84,823	87,965	91,106
3.	94,248	97,389	100,531	103,673	106,814	109,956	113,097	116,239	119,381	122,522
4.	125,664	128,806	131,947	135,089	138,230	141,370	144,514	147,655	150,797	153,938
5.	157,08	160,22	163,36	166,50	169,65	172,79	175,93	179,07	182,21	185,35
6.	188,50	191,64	194,78	197,92	201,06	204,20	207,35	210,49	213,63	216,77
7.	219,91	223,05	226,19	229,34	232,48	235,62	238,76	241,90	245,04	248,19
8.	251,33	254,47	257,61	260,75	263,89	267,04	270,18	273,32	276,46	279,60
9.	282,74	285,88	289,03	292,17	295,31	298,45	301,59	304,73	307,88	311,02
10.	314,16	317,30	320,44	323,58	326,73	329,87	333,01	336,15	339,29	342,43
11.	345,58	348,72	351,86	355,00	358,14	361,28	364,42	367,57	370,71	373,85
12.	376,99	380,13	383,27	386,42	389,56	392,70	395,84	398,98	402,12	405,27
13.	408,41	411,55	414,69	417,83	420,97	424,12	427,26	430,40	433,54	436,68
14.	439,82	442,96	446,11	449,25	452,39	455,53	458,67	461,81	464,96	468,10
15.	471,24	474,38	477,52	480,66	483,81	486,95	490,09	493,23	496,37	499,51
16.	502,65	505,80	508,94	512,08	515,22	518,36	521,50	524,65	527,79	530,93
17.	534,07	537,21	540,35	543,50	546,64	549,78	552,92	556,06	559,20	562,35
18.	565,49	568,63	571,77	574,91	578,05	581,19	584,34	587,48	590,62	593,76
19.	596,90	600,04	603,19	606,33	609,47	612,61	615,75	618,89	622,04	625,18
20.	628,32	631,46	634,60	637,74	640,88	644,03	647,17	650,31	653,45	656,59
21.	659,73	662,88	666,02	669,16	672,30	675,44	678,58	681,73	684,87	688,01
22.	691,15	694,29	697,43	700,58	703,72	706,86	710,00	713,14	716,28	719,42
23.	722,57	725,71	728,85	731,99	735,13	738,27	741,42	744,56	747,70	750,84
24.	753,98	757,12	760,27	763,41	766,55	769,69	772,83	775,97	779,11	782,26
25.	785,40	788,54	791,68	794,82	797,96	801,11	804,25	807,39	810,53	813,67
26.	816,81	819,96	823,10	826,24	829,38	832,52	835,66	838,81	841,95	845,09
27.	848,23	851,37	854,51	857,65	860,80	863,94	867,08	870,22	873,36	876,50
28.	879,65	882,79	885,93	889,07	892,21	895,35	898,50	901,64	904,78	907,92
29.	911,06	914,20	917,35	920,49	923,63	926,77	929,91	933,05	936,19	939,34

Exemple: Longueur de la circonférence de diamètre 142 mm
lire : 446,11 mm

Exemple: Diamètre de la circonférence de longueur 860 mm
lire: 274 mm, environ



$$\pi = \frac{\text{CIRCONFÉRENCE}}{\text{DIAMÈTRE}}$$

$\pi = 3,14159\ldots$

LONGUEUR DES ARCS DE RAYON = 1

°	VALEURS	′	VALEURS	″	VALEURS
1	0,0175	1	0,000 291	1	0,000 005
2	0,0349	2	0,000 582	2	0,000 010
3	0,0524	3	0,000 873	3	0,000 015
4	0,0698	4	0,001 164	4	0,000 019
5	0,0873	5	0,001 454	5	0,000 024
6	0,1047	6	0,001 745	6	0,000 029
7	0,1222	7	0,002 036	7	0,000 034
8	0,1396	8	0,002 327	8	0,000 039
9	0,1571	9	0,002 618	9	0,000 044
		10	0,002 909	10	0,000 048
		20	0,005 818	20	0,000 097
		30	0,008 727	30	0,000 145
		40	0,011 636	40	0,000 190
		50	0,014 544	50	0,000 242

APPLICATION

La longueur d'un arc de 62° 34′ 15″ s'obtient :

62°	= 1,082 1
30′	= 0,008 727
4′	= 0,001 164
10″	= 0,000 048
5″	= 0,000 024
62° 34′ 15″	= 1,092 063
	I ≈ 1,092

Les longueurs des arcs de ° en ° sont données sur Doc 37 et 38

CERCLE

Doc 40

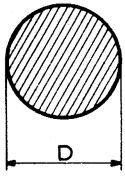
D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	0,79	3,14	7,07	12,57	19,64	28,27	38,48	50,27	63,62
1.	78,54	95,03	113,10	132,73	153,94	176,72	201,06	226,98	254,47	283,53
2.	314,16	346,36	380,13	415,48	452,39	490,87	530,93	572,56	615,75	660,52
3.	706,86	754,77	804,25	855,30	907,92	962,11	1 017,88	1 075,21	1 134,11	1 194,59
4.	1 256,64	1 320,25	1 385,44	1 452,20	1 520,53	1 590,43	1 661,90	1 734,94	1 809,56	1 885,74
5.	1 963,50	2 042,82	2 123,72	2 206,18	2 290,22	2 375,83	2 463,01	2 551,76	2 642,08	2 733,97
6.	2 827,43	2 922,47	3 019,07	3 117,25	3 216,99	3 318,31	3 421,19	3 525,65	3 631,68	3 739,28
7.	3 848,45	3 959,19	4 071,50	4 185,39	4 300,84	4 417,86	4 536,46	4 656,63	4 778,36	4 901,67
8.	5 026,55	5 153,00	5 281,02	5 410,61	5 541,77	5 674,50	5 808,80	5 944,68	6 082,12	6 221,14
9.	6 361,73	6 503,88	6 647,61	6 792,91	6 939,78	7 088,22	7 238,23	7 389,81	7 542,96	7 697,69
10.	7 854,0	8 011,9	8 171,3	8 332,3	8 494,9	8 659,0	8 824,7	8 992,0	9 160,9	9 331,3
11.	9 503,3	9 676,9	9 852,0	10 028,7	10 207,0	10 386,9	10 568,3	10 751,3	10 935,9	11 122,0
12.	11 309,7	11 499,0	11 689,9	11 882,3	12 076,3	12 271,8	12 469,0	12 667,7	12 868,0	13 069,8
13.	13 273,2	13 478,2	13 684,8	13 892,9	14 102,6	14 313,9	14 526,7	14 741,1	14 957,1	15 174,7
14.	15 393,8	15 614,5	15 836,8	16 060,6	16 286,0	16 513,0	16 741,5	16 971,7	17 203,4	17 436,6
15.	17 671,5	17 907,9	18 145,8	18 385,4	18 626,5	18 869,2	19 113,4	19 359,3	19 606,7	19 855,7
16.	20 106,2	20 358,3	20 612,0	20 867,2	21 124,1	21 382,5	21 642,4	21 904,0	22 167,1	22 431,8
17.	22 698,0	22 965,8	23 235,2	23 506,2	23 778,7	24 052,8	24 328,5	24 605,7	24 884,6	25 164,9
18.	25 446,9	25 730,4	26 015,5	26 302,2	26 590,4	26 880,3	27 171,6	27 464,6	27 759,1	28 055,2
19.	28 352,9	28 652,1	28 952,9	29 255,3	29 559,2	29 864,8	30 171,9	30 480,5	30 790,7	31 102,6
20.	31 415,9	31 730,9	32 047,4	32 365,5	32 685,1	33 006,4	33 329,2	33 653,5	33 979,5	34 307,0
21.	34 636,1	34 966,7	35 298,9	35 632,7	35 968,1	36 305,0	36 643,5	36 983,6	37 325,3	37 668,5
22.	38 013,3	38 359,6	38 707,6	39 057,1	39 408,1	39 760,8	40 115,0	40 470,8	40 828,1	41 187,1
23.	41 547,6	41 909,6	42 273,3	42 638,5	43 005,3	43 373,6	43 743,5	44 115,0	44 488,1	44 862,7
24.	45 238,9	45 616,7	45 996,1	46 377,0	46 759,5	47 143,5	47 529,2	47 916,4	48 305,1	48 695,5
25.	49 087,4	49 480,9	49 875,9	50 272,6	50 670,7	51 070,5	51 471,9	51 874,8	52 279,2	52 685,3
26.	53 092,9	53 502,1	53 912,9	54 325,2	54 739,1	55 154,6	55 571,6	55 990,2	56 410,4	56 832,2
27.	57 255,5	57 680,4	58 106,9	58 534,9	58 964,6	59 395,7	59 828,5	60 262,8	60 698,7	61 136,2
28.	61 575,2	62 015,8	62 458,0	62 901,8	63 347,1	63 794,0	64 242,4	64 692,5	65 144,1	65 597,2
29.	66 052,0	66 508,3	66 966,2	67 425,6	67 886,7	68 349,3	68 813,4	69 279,2	69 746,5	70 215,4

Exemple: Surface d'un cercle de diamètre 28 mm
lire: 615,75 mm²

Exemple: Diamètre d'un cercle de surface 531 mm²
lire: 26 mm environ

SURFACES CIRCULAIRES

① CERCLE

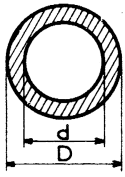


$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Ex: D = 50 mm

S = 1963,50 mm²

② COURONNE

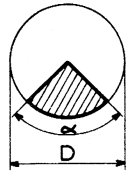


$$S = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

Ex: D = 40 mm
d = 30 mm

S = 549,50 mm²

③ SECTEUR

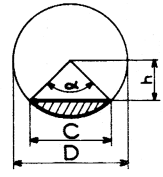


$$S = \frac{\pi D^2 \alpha}{4 \times 360}$$

Ex: D = 25 mm
α = 100°

S = 136,28 mm²

④ SEGMENT



$$S = \text{(secteur)} - \text{(triangle)}$$

$$S = \frac{\pi D^2 \alpha}{4 \times 360} - \frac{C\,h}{2}$$

Ex: D = 40 mm
α = 90°

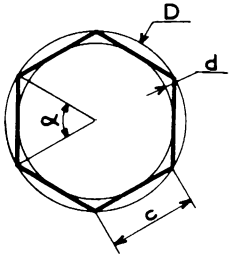
S = 114,16 mm²

Les surfaces des segments de ° en ° sont données sur Doc 37 et 38

Doc 41

SURFACES PLANES

① POLYGONES RÉGULIERS



	3 TRIANGLE	4 CARRÉ	5 PENTAGONE	6 HEXAGONE	8 OCTOGONE	10 DÉCAGONE	12 DODÉCAGONE
N	3	4	5	6	8	10	12
α	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°

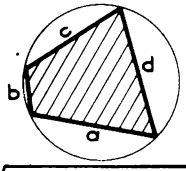
c = *longueur du côté*
d = *diamètre Φ inscrit*
S = *surface du polygone*

VALEURS POUR D=1

c	0,866	0,707	0,588	0,500	0,383	0,309	0,259
d	0,500	0,707	0,811	0,866	0,923	0,952	0,967
S	0,325	0,500	0,596	0,650	0,707	0,735	0,750

SURFACES USUELLES

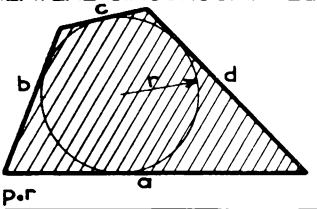
② QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE



$p = \frac{a+b+c+d}{2}$

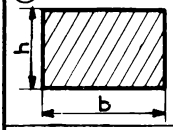
$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

③ QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE



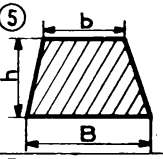
$S = p.r$

④ RECTANGLE



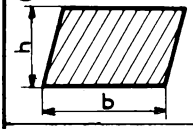
$S = b.h$

⑤ TRAPÈZE



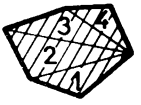
$S = \frac{B+b}{2}.h$

⑥ PARALLÉLOGRAMME



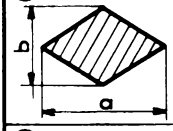
$S = b.h$

⑦ POLYGONE QUELCONQUE



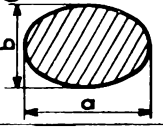
$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

⑧ LOSANGE



$S = \frac{a.b}{2}$

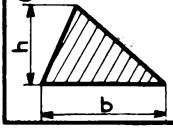
⑨ ELLIPSE



$S = \frac{\pi.a.b}{4}$

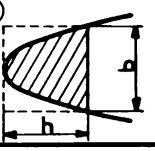
$S = 0{,}785.a.b$

⑩ TRIANGLE



$S = \frac{b.h}{2}$

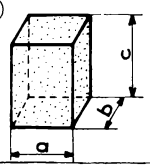
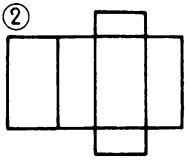
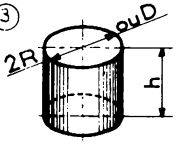
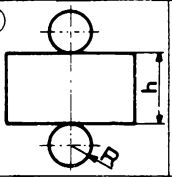
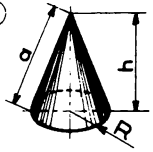
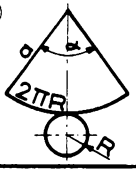
⑪ SEGMENT PARABOLIQUE

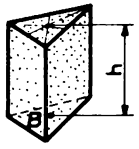
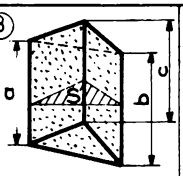
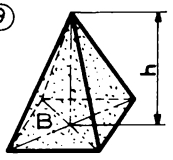
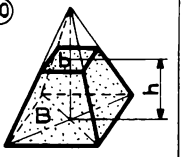
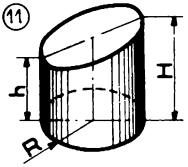
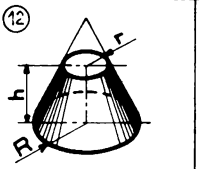
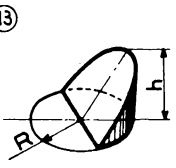
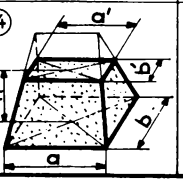


$S = \frac{2}{3}(b.h)$

SOLIDES
À SURFACE DÉVELOPPABLE

Doc 42

VOLUMES		SURFACES	
① 	PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE $V = a.b.c$ CUBE : $a=b=c$ $V = a^3$	② 	*Développement* $S = 2(ab+bc+ca)$ Pour le CUBE $S = 6a^2$
③ 	CYLINDRE $V = \pi R^2 h$ ou $V = \frac{\pi D^2 h}{4}$	④ 	*Développement* $S_{latérale} = 2\pi Rh$ (Sl) $S_{totale} = 2\pi R(R+h)$ (St)
⑤ 	CÔNE $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$	⑥ 	*Développement* $\alpha = \frac{360° \times R}{a}$ $Sl = \pi Ra$ $St = \pi Ra + \pi R^2$ $= \pi R(R+a)$

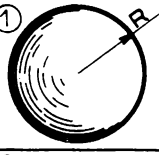
VOLUMES			
⑦ 	PRISME $V = B.h$	⑧ 	TRONC DE PRISME TRIANGULAIRE $V = S \times \frac{a+b+c}{3}$ S (*section droite*)
⑨ 	PYRAMIDE $V = \frac{B.h}{3}$	⑩ 	TRONC DE PYRAMIDE $V = \frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$
⑪ 	CYLINDRE TRONQUÉ $V = \pi R^2\left(\frac{H+h}{2}\right)$	⑫ 	TRONC DE CÔNE $V = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$
⑬ 	ONGLET CYLINDRIQUE $V = \frac{2}{3}R^2 h$	⑭ 	TAS DE CAILLOUX $V = \frac{h}{6}[b(2a+a')+b'(2a'+a)]$

Doc 43

SOLIDES

À SURFACE NON DÉVELOPPABLE

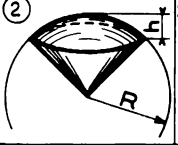
① SPHÈRE



$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6}$

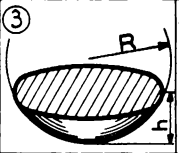
② SECTEUR SPHÉRIQUE



$S_{calotte} = 2\pi R h$

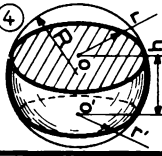
$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

③ SEGMENT SPHÉRIQUE *à une base*



$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

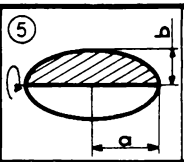
④ SEGMENT SPHÉRIQUE *à deux bases*



$S_{zone} = 2\pi R h$

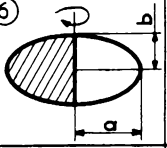
$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r^2 + r'^2)$

⑤ ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION *allongé*



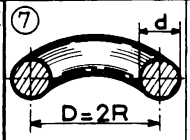
$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$

⑥ ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION *aplati*



$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

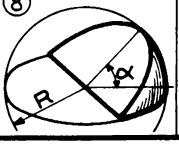
⑦ TORE



$S = \pi^2 D d$

$V = \frac{\pi^2 D d^2}{4}$

⑧ ONGLET SPHÉRIQUE



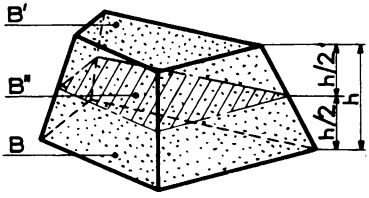
$S_{fuseau} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}$

$V_{onglet} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$

⑨ FORMULE DES 3 NIVEAUX

$B // B' // B''$

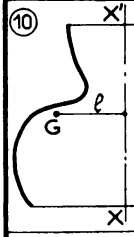
$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B'')$



APPLICATIONS:

- *tronc de pyramide*
- *tronc de cône*
- *segment sphérique*
- *tas de sable*

1er THEORÈME DE GULDIN

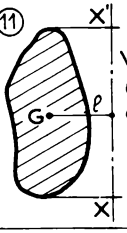


G: *centre de gravité de la ligne*

S: *Surface engendrée par une ligne qui tourne autour d'un axe XX' (de son plan) ne coupant pas la ligne.*

S = longueur ligne $\times\ 2\pi\ell$

2ème THEORÈME DE GULDIN

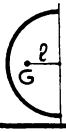


G: *centre de gravité de la surface*

V: *Volume engendré par une surface qui tourne autour d'un axe XX' (de son plan) ne coupant pas la surface.*

V = Surface $\times\ 2\pi\ell$

⑫ APPLICATION: *centre de gravité de la demi-circonférence:*



$4\pi R^2 = \pi R \times 2\pi\ell$

$\ell = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}636R$

⑬ APPLICATION: *centre de gravité du demi-cercle:*

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \times 2\pi\ell$

$\ell = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R$

CENTRE DE GRAVITÉ

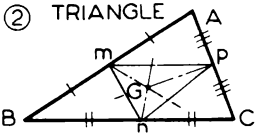
Doc 44

LIGNES

① SEGMENT DE DROITE

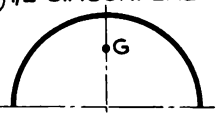
G: *milieu du segment*

② TRIANGLE



G: *point de concours des bissectrices de m n p*

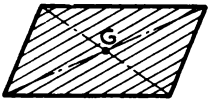
③ 1/2 CIRCONFÉRENCE



$OG = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}636R$

SURFACES

④ PARALLÉLOGRAMME



G: *point de rencontre des diagonales*

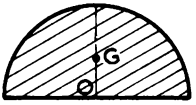
⑤ TRIANGLE

G: *point de concours des médianes* $A'G = \frac{AA'}{3}$

⑥ TRAPÈZE

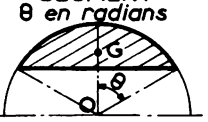
$X = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b}$

⑦ DEMI-CERCLE



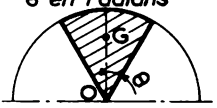
$OG = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R$

⑧ SEGMENT θ *en radians*



$OG = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin^3\theta}{\theta - \sin\theta\cos\theta}$

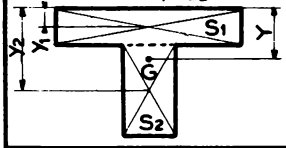
⑨ SECTEUR θ *en radians*



$OG = \frac{2R.\sin\theta}{3\theta}$

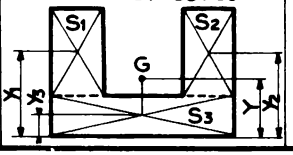
⑩

$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$



⑪

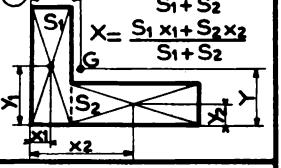
$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3}$



⑫

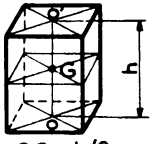
$Y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$

$X = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}$



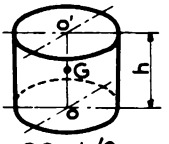
VOLUMES

⑬ PRISME



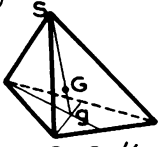
$OG = h/2$

⑭ CYLINDRE



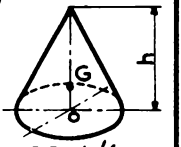
$OG = h/2$

⑮ PYRAMIDE



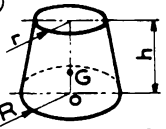
$gG = Sg/4$

⑯ CÔNE



$OG = h/4$

⑰ TRONC DE CÔNE

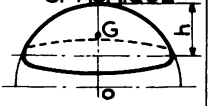


$OG = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$

⑱ SECTEUR SPHÉRIQUE

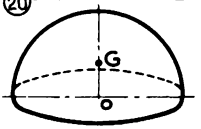
$OG = \frac{3R}{8}(1+\cos\theta)$

⑲ SEGMENT SPHÉRIQUE



$OG = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R-h)^2}{3R-h}$

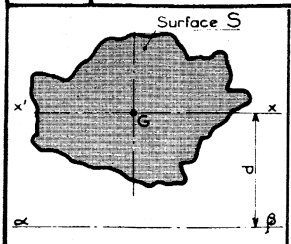
⑳ DEMI-SPHÈRE



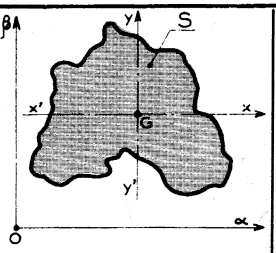
$OG = \frac{3R}{8}$

Doc 45

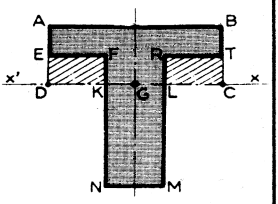
RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



$$I_{\alpha\beta} = I_{x'x} + Sd^2$$



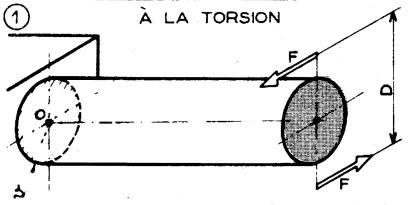
$$I_o = I_{o\alpha} + I_{o\beta}$$
$$I_G = I_{x'x} + I_{y'y}$$



$$I_{x'x\ (ABTRMNFE)} = \begin{cases} I_{x'x}(ABCD) \\ -2I_{x'x}(EFKD) \\ +\ I_{x'x}(KLMN) \end{cases}$$

FORMULES DE CALCUL

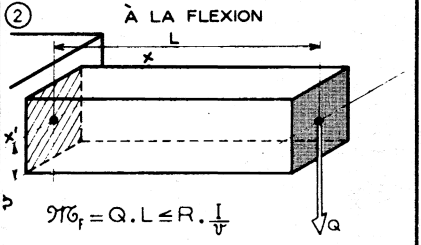
① À LA TORSION



$$\mathcal{M}_t = F.D \leq R_g . \frac{I_o}{v}$$

R_g . Résistance pratique au glissement transversal
I_o . Moment d'inertie polaire

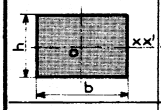
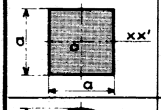
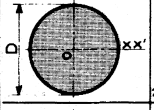
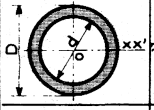
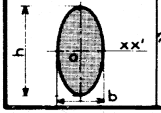
② À LA FLEXION



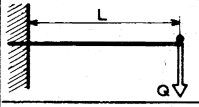
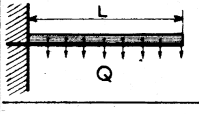
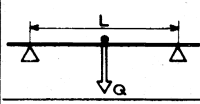
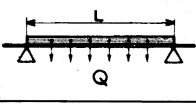
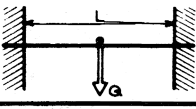
$$\mathcal{M}_f = Q.L \leq R . \frac{I}{v}$$

R . Résistance pratique à la traction
I . Moment d'inertie par rapport à x'x

MOMENTS D'INERTIE

SECTIONS	TORSION I_o	TORSION v	FLEXION $I_{x'x}$	FLEXION v
	$\frac{bh(b^2+h^2)}{12}$	$\sqrt{de}$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a}{2}$
	$\frac{\pi D^4}{32} \approx 0{,}1D^4$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0{,}05D^4$	$\frac{D}{2}$
	$\approx 0{,}1(D^4-d^4)$	$\frac{D}{2}$	$\approx 0{,}05(D^4-d^4)$	$\frac{D}{2}$
	$\approx 0{,}05bh \times (b^2+h^2)$	$\frac{h}{2}$	$\approx 0{,}5bh^3$	$\frac{h}{2}$

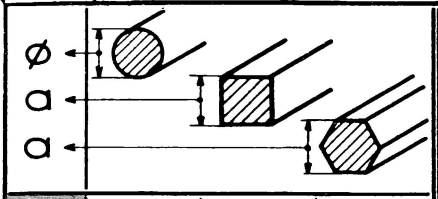
MOMENTS DE FLEXION

CAS USUELS E (module d'élasticité)	MOMENT fléchissant	FLÈCHE
	QL	$\frac{QL^3}{3EI}$
	$\frac{QL}{2}$	$\frac{QL^3}{8EI}$
	$\frac{QL}{4}$	$\frac{QL^3}{48EI}$
	$\frac{QL}{8}$	$\frac{5}{8} \times \frac{QL^3}{48EI}$
	$\frac{QL}{8}$	$\frac{QL^3}{192EI}$

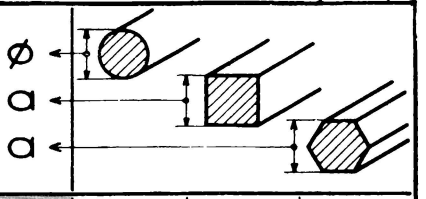
MASSE DES BARRES

EN kg PAR MÈTRE

Doc 46



Ø		a	a
5	0,154	0,196	0,170
6	0,222	0,283	0,245
7	0,302	0,385	0,333
8	0,395	0,502	0,435
9	0,499	0,636	0,551
10	0,617	0,785	0,680
11	0,746	0,950	0,823
12	0,888	1,130	0,979
13	1,04	1,33	1,15
14	1,21	1,54	1,31
15	1,39	1,77	1,53
16	1,58	2,01	1,74
17	1,78	2,27	1,96
18	2,00	2,54	2,20
19	2,23	2,83	2,45
20	2,47	3,14	2,72
21	2,72	3,46	3,00
22	2,98	3,80	3,29
23	3,26	4,15	3,60
24	3,55	4,52	3,92
25	3,85	4,91	4,25
26	4,17	5,31	4,60
27	4,50	5,72	4,96
28	4,83	6,15	5,33
29	5,19	6,60	5,72
30	5,55	7,06	6,12
31	5,92	7,54	6,53
32	6,31	8,04	6,96
33	6,71	8,55	7,40
34	7,13	9,07	7,86
35	7,55	9,62	8,33
36	7,99	10,2	8,81
37	8,44	10,8	9,31
38	8,90	11,3	9,82
39	9,38	11,9	10,34
40	9,87	12,6	10,9



Ø		a	a
42	10,9	13,8	12,0
44	11,9	15,2	13,2
46	13,0	16,6	14,4
48	14,2	18,1	15,7
50	15,4	19,6	17,0
52	16,7	21,2	18,4
54	18,0	22,9	19,8
56	19,3	24,6	21,3
58	20,7	26,4	22,9
60	22,2	28,3	24,5
65	26,0	33,2	28,7
70	30,2	38,5	33,3
75	34,7	44,2	38,2
80	39,5	50,2	43,5
85	44,5	56,7	49,1
90	49,9	63,6	55,1
95	55,6	70,8	61,4
100	61,7	78,5	68,0
105	68,0	86,5	
110	74,6	95,0	
115	81,5	104	
120	88,8	113	
125	96,3	123	
130	104	133	
135	112	143	
140	121	154	
145	130	165	
150	139	177	
160	158	201	
170	178	227	
180	200	254	
190	223	283	
200	247	314	
210	272	346	
220	298	380	
230	326	415	

POIDS DES TÔLES D'ACIER

$1m^2$ de tôle de 1mm pèse 7,85kg

$1m^2$ ——— e ——— 7,85kg.e

LIRE DIRECTEMENT LA MASSE DES BARRES EN ACIER ($\delta = 7,85$). POUR LES AUTRES MATÉRIAUX MULTIPLIER LA VALEUR LUE PAR

$$K = \frac{\text{densité du matériau}}{\text{densité de l'acier}}$$

QUELQUES VALEURS DE K

Acier	1	Etain	0,93
Aluminium	0,34	Plomb	1,45
Cuivre	1,13	Zinc	0,92

Doc 47

CARACTÉRISTIQUES

	NOMS	SYMBOLE CHIMIQUE OU COMPOSITION	DENSITÉ (1)	TEMPÉRATURE DE FUSION	TEMPÉRATURE D'ÉBULLITION	CHALEUR SPÉCIFIQUE (2)	COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE	
MÉTAUX	Aluminium	Al	2,7	658°		0,225	0,000024	
	Antimoine	Sb	6,71	630°		0,050	0, — 011	
	Argent	Ag	10,53	960°		0,056	0, — 020	
	Chrome	Cr	6,80	1550°		0,120		
	Cobalt	Co	8,80	1490°		0,104		
	Cuivre	Cu	8,90	1090°		0,093	0, — 017	
	Etain	Sn	7,30	232°		0,058	0, — 023	
	Fer	Fe	7,85	1535°		0,120	0, — 012	
	Mercure	Hg	13,60	— 39°		0,033		
	Nickel	Ni	8,90	1452°		0,109	0, — 013	
	Or	Au	19,25	1063°		0,031	0, — 014	
	Platine	Pt	21,48	1764°		0,038	0, — 009	
	Plomb	Pb	11,37	327°		0,031	0, — 029	
	Vanadium	V	5,60	1725°		0,115		
ALLIAGES	Zinc	Zn	7,19	419°		0,094	0, — 029	
	Acier	Fe, C	7,85	1400°			0, — 012	
	Fonte grise	Fe, C	7,2	1230°			0, — 011	
	Bronze	Cu, Sn	7,5→8,5	900°			0, — 018	
	Bronze d'Alu.	Cu, Sn, Al	≃7,5	1060°				
	Laiton	Cu, Zn	7,3→8,4	940°			0, — 019	
MÉTALLOIDES	* Azote	N	0,97	— 210°	— 196°			
	Bismuth	Bi	9,80	271°				
	Brome	Br	3,18	— 7°	63°			
	* Chlore	Cl	2,49	— 102°	— 34°			
	* Hydrogène	H	0,07	— 259°	— 253°			
	Iode	I	4,95	184°				
	* Oxygène	O	1,11	— 218°	— 183°			
	Phosphore	P	1,83	44°	287°			
	Soufre	S	2,07	112°	445°			
CORPS COMPOSÉS	* Ac. Sulfureux	SO_2	2,27		— 10°			
	* Ac. Sulfurique	SO_4H_2	1,19					
	Ac. Chlorhydrique	HCl	1,27		110°			
	Alcool	C_2H_6O	0,79	— 130°	78°			
	* Ammoniac	NH_3	0,59		— 33°			
	Benzine	C_6H_6	0,90	5°				
	Eau	H_2O	⊖	0°	100°			
	Ether	$(C_2H_5)_2O$	0,73	— 117°	35°			
	* Gaz Carbonique	CO_2	1,59	— 56°	— 78°			
	* Méthane	CH_4	0,59		— 165°			
MÉLANGES	* Air	O, N	⊖		— 194°			
	Caoutchouc		0,98	120°				
	Essence		0,72					
	Graisse		0,94	30°				
	Houille	C	1,2→1,5					
	Huile de lin		0,95		387°			
	Pétrole		0,80		106°			

Chaleur nécessaire pour élever de 1°C la température de 1kg de ce corps (en grandes calories) ⟵

Allongement subi par l'unité de longueur d'un corps entre 0°C et 1°C ⟵

DENSITÉ (δ) d'un corps : *Rapport entre les masses spécifiques du corps et de l'étalon :*

- SOLIDE. LIQUIDE : $\delta = \frac{corps}{eau}$
- GAZ : $\delta = \frac{corps}{air}$

Nota : Les valeurs indiquées colonnes (1) et (2) s'entendent à 0°C sous la pression atmosphérique de 760 mm de mercure.

* *Corps gazeux à 0°C*

MATIERES PLASTIQUES		
NOM	NOM CHIMIQUE	COMP.
Bakélite	Phénol-formol	C_7H_8O
Nylon	Polyamide	$C_6H_{11}ON$
Pollopas	Urée-formol	$C_3H_6ON_2$
Plexiglass	Polyoacrylates	$C_5H_8O_2$
Rhodopas	Polyacétate vinyle	$C_4H_6O_2$
Silicones	Silicones	$Si_xC_yH_zO_t$